УДК 514.12(072.8)
ББК В151.54р30
Б 78

Серія «Математичний практикум»
Заснована у 2012 році

*Рекомендовано до друку вченою радою
механіко-математичного факультету
Львівського національного університету імені Івана Франка
Протокол № 2 від 21.10.2015*

Бокало Б. М.

Б 78 Аналітична геометрія в прикладах і задачах : навчальний посібник / Б. М. Бокало, В. Л. Бридун, І. Й. Гуран, Н. М. Колос. — Львів : Видавець І. Е. Чижиков, 2016. — 335 с. — (Серія «Математичний практикум»).

ISBN 978-966-2645-16-3

Розглянуто методи розв'язування основних типів задач, які пов'язані з векторною алгеброю, прямою на площині, прямою та площиною в просторі, теорією ліній і поверхонь другого порядку, а також лінійних і афінних перетворень. У кожному розділі подано коротке викладення теоретичного матеріалу, а також вправи для самостійної роботи.

Для студентів вищих навчальних закладів, вчителів і тих, хто хоче самостійно опанувати методи аналітичної геометрії.

УДК 514.12(072.8)
ББК В151.54р30

ISBN 978-966-2645-16-3
ISBN 978-966-2645-02-6 (серія)

Зміст

Вступ

Хто добре запалився, той добре почав,
а добре почати — це наполовину завершити.
Григорій Сковорода

Серед основних математичних курсів важливим є курс аналітичної геометрії. Тим, хто хоче здобути якісну математичну освіту, вартує приділити значну увагу цьому курсу. Як і більшість математичних предметів, аналітична геометрія потребує просторової уяви, технічних вмінь, абстрактного мислення. Перелік розв'язаних завдань допоможе оволодіти необхідними технічними прийомами, а виконання завдань для самостійної роботи сприятиме розвитку творчих здібностей студентів.

Посібник з аналітичної геометрії складається з двох частин. Перша частина містить 36 параграфів, кожен з яких розпочинається з теоретичного матеріалу. Запропонований зміст теоретичного матеріалу є достатній для практичного оволодіння тією чи іншою темою курсу. Після кожного параграфа наведено перелік типових завдань для слухачів повного курсу аналітичної геометрії, які охоплюють необхідний і достатній рівні для проведення практичних занять і підготовки до іспиту. Друга частина розрахована на індивідуальне навчання (наприклад, для студентів заочної форми) і містить доволі великий перелік типових завдань для самостійного опрацювання.

Посібник буде корисним не тільки студентам, які вивчають курс аналітичної геометрії на профільних факультетах, а й тим, хто вивчає аналітичну геометрію як розділ курсу вищої математики.

Розділ 1
Векторна алгебра

1.1. Вектори. Операції над векторами. База простору. Координати вектора в базі

Напрямленим відрізком називається відрізок, на якому зазначено, яка з кінцевих його точок вважається першою, яка другою. Перша точка напрямленого відрізка називається *початком*, а друга точка — *кінцем* напрямленого відрізка. Напрямлені відрізки позначаємо великими латинськими літерами зі стрілкою зверху, тобто $\overrightarrow{AB}$ означає напрямлений відрізок, в якого A — початок, а B — кінець. Якщо точки A і B різні, то напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$ називається *ненульовим* (або *невиродженим*), якщо ж точки A і B збігаються, то напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$ називається *нульовим* (або *виродженим*).

Два напрямлені відрізки називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на тій самій прямій, або на паралельних прямих. Нульовий напрямлений відрізок вважається колінеарним до будь-якого ненульового напрямленого відрізка.

Два колінеарні напрямлені відрізки $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, які належать одній прямій, називаються *співнапрямленими*, якщо промені AB та CD перетинаються по промені. В іншому випадку напрямлені відрізки називаються *протилежно напрямленими*. Два колінеарні напрямлені відрізки $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, які належать паралельним прямим, називаються *співнапрямленими*, якщо точки B і D лежать по один бік стосовно прямої AC. Якщо ж точки B і D лежать по різні боки стосовно прямої AC, то ці напрямлені відрізки називаються *протилежно напрямленими*. Надалі використовуватимемо такі позначення:

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ означає, що напрямлені відрізки $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ колінеарні;

$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ означає, що напрямлені відрізки $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ співнапрямлені;

$\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$ означає, що напрямлені відрізки $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ протилежно напрямлені.

Довжиною напрямленого відрізка називається довжина відповідного відрізка. Довжину напрямленого відрізка $\overrightarrow{AB}$ позначаємо символом $|\overrightarrow{AB}|$.

Два напрямлені відрізки $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ називаються *рівними*, якщо виконуються такі умови:

1) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$; 2) $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

Теорема 1.1.1. *Відношення рівності є відношенням еквівалентності на множині напрямлених відрізків, тобто:*

1) кожний напрямлений відрізок рівний сам собі (умова рефлексивності);

2) якщо напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$ рівний напрямленому відрізку $\overrightarrow{CD}$, то напрямлений відрізок $\overrightarrow{CD}$ рівний напрямленому відрізку $\overrightarrow{AB}$ (умова симетричності);

3) якщо напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$ рівний напрямленому відрізку $\overrightarrow{CD}$, а напрямлений відрізок $\overrightarrow{CD}$ рівний напрямленому відрізку $\overrightarrow{MN}$, то напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$ рівний напрямленому відрізку $\overrightarrow{MN}$ (умова транзитивності).

Відношення рівності на множині напрямлених відрізків розбиває цю множину на класи так, що в кожний клас потрапляють рівні між собою напрямлені відрізки.

Означення 1.1.2. Клас за відношенням рівності на множині напрямлених відрізків називають *вектором*.

Клас напрямлених відрізків, довжина яких дорівнює 0, називається *нульовим* вектором і позначається $\vec{0}$.

Далі вектори позначатимемо маленькими латинськими літерами з позначкою вектора над літерою (наприклад, $\vec{a}$, $\vec{p}$). Оскільки напрямлений відрізок однозначно представляє вектор, то напрямлені відрізки ми також називаємо векторами і замість формального запису $\overrightarrow{AB} \in \vec{a}$ пишемо неформальну рівність $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. На прямій, площині чи в просторі вектори зображаємо їхніми представниками, тобто

напрямленими відрізками. Два вектори називаються *колінеарними*, якщо їхні представники колінеарні, *співнапрямленими*, якщо їхні представники співнапрямлені і *протилежно напрямленими*, якщо їхні представники протилежно напрямлені.

Зауваження 1.1.3. Надалі, якщо ми кажемо, що відкладемо вектор $\vec{a}$ від точки A, то це означає "відкладемо напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$, який належить вектору $\vec{a}$ і початок якого збігається з точкою A". Якщо ми кажемо, що вектор $\vec{a}$ належить прямій (площині π) чи паралельний до прямої l (площини π), то це означає, що існує напрямлений відрізок, який належить вектору $\vec{a}$ і прямій l (відповідно, площині π).

Визначимо операції додавання векторів і множення вектора на скаляр так.

Означення 1.1.4. Якщо від кінця вектора $\vec{a}$ відкласти вектор $\vec{b}$, то вектор, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець кінцем вектора $\vec{b}$, називається *сумою* векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (див. рис. 1). Позначаємо суму векторів $\vec{a} + \vec{b}$.

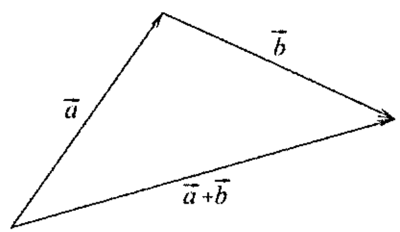


Рис. 1

Додаючи вектори таким способом, кажемо, що використовується *правило трикутника*.

Означення 1.1.5. *Добутком вектора $\vec{a}$ на число* $\lambda \in \mathbb{R}$ називається вектор $\vec{p} = \lambda\vec{a}$, який задовольняє такі умови:

1) $|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$;

2) якщо $\lambda > 0$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{p}$; якщо $\lambda < 0$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{p}$; якщо $\lambda = 0$, то $\lambda\vec{a} = \vec{0}$.

Лема 1.1.6. *Вектор $\vec{a}$ колінеарний ненульовому вектору $\vec{b}$ тоді і тільки тоді, коли існує число $\lambda \in \mathbb{R}$ таке, що $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.*

Теорема 1.1.7. *Операції додавання векторів і множення вектора на число мають такі властивості:*

1) для довільних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ виконується асоціативність додавання векторів, тобто $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;

2) для довільних векторів $\vec{a}, \vec{b}$ виконується комутативність додавання векторів, тобто $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$;

3) існує такий нульовий вектор $\vec{0}$, що для довільного вектора $\vec{a}$ справджується рівність $\vec{0}+\vec{a} = \vec{a}+\vec{0} = \vec{a}$;

4) для довільного вектора $\vec{a}$ існує такий вектор $-\vec{a}$, що $\vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{0}$;

5) при множенні довільного вектора $\vec{a}$ на одиницю отримуємо той самий вектор, тобто $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$;

6) для довільних дійсних чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ і довільного вектора $\vec{a}$ виконується $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$;

7) для довільних дійсних чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ і довільного вектора $\vec{a}$ виконується $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$;

8) для довільних дійсних чисел $\alpha \in \mathbb{R}$ і довільних векторів $\vec{a}, \vec{b}$ виконується $\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$.

Нехай V — деяка множина, елементи якої називаємо векторами, хоча їхня природа може бути довільною, і нехай $\mathbb{K}$ — деяке поле (читач може поки що вважати, що $\mathbb{K}$ — це множина $\mathbb{R}$ всіх дійсних чисел). Припустимо, що для довільних двох векторів $\vec{a}, \vec{b} \in V$ визначений третій вектор, який позначається символом $\vec{a}+\vec{b}$ і називається *сумою* векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Крім того, припустимо, що для довільного числа $\alpha \in \mathbb{K}$ і довільного вектора $\vec{a} \in V$ визначений вектор, який позначається символом $\alpha\vec{a}$ і називається *добутком вектора $\vec{a}$ на число α*. Якщо у цьому випадку виконуються властивості 1–8 з теореми 1.1.7, то множина з так визначеними на ній операціями називається *векторним (або лінійним) простором.*

Ми визначили вектори, операції додавання векторів і множення вектора на дійсне число, розглядаючи класи напрямлених відрізків у просторі. Цей векторний простір позначатимемо через V_3. Якщо ми розглянемо вектори, які належать деякій фіксованій прямій, то сума векторів і добуток вектора на дійсне число належить цій прямій. Отже, множина всіх векторів, які належать фіксованій прямій з операціями додавання та множення вектора на дійсне число теж утворюють векторний простір, який ми позначатимемо через V_1. Аналогічно, якщо розглянути всі вектори, які належать деякій фіксованій площині, то сума векторів і добуток вектора на дійсне число належить цій площині, отже, множина всіх векторів, які належать фіксованій площині з операціями додавання та множення вектора на дійсне число є векторним простором, який ми позначатимемо через V_2.

Нехай V деякий векторний простір з операціями додавання та множення вектора на дійсне число.

Лінійною комбінацією системи векторів $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n} \in V$ називається вектор вигляду $\alpha_1\vec{a_1}+\cdots+\alpha_n\vec{a_n}$, де $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ довільні дійсні числа.

Система векторів $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n} \in V$ називається *лінійно залежною*, якщо існують такі дійсні числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, які одночасно не дорівнюють нулю, що $\lambda_1\vec{a_1}+\cdots+\lambda_n\vec{a_n} = \vec{0}$.

Зауваження 1.1.8. Будь-яка система векторів, яка містить нульовий вектор, є лінійно залежною.

Система векторів $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n} \in V$ називається *лінійно незалежною*, якщо лінійна комбінація $\lambda_1\vec{a_1}+\cdots+\lambda_n\vec{a_n} = \vec{0}$ тоді і тільки тоді, коли $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Зауваження 1.1.9. Будь-яка підсистема лінійно незалежної системи векторів лінійно незалежна.

Система векторів $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n} \in V$ називається *повною*, або *системою твірних*, якщо для довільного вектора $\vec{b}$ існують такі дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, що $\vec{b} = \lambda_1\vec{a_1}+\cdots+\lambda_n\vec{a_n}$.

Означення 1.1.10. Система векторів $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n} \in V$ називається *базою* простору V, якщо вона є повною і лінійно незалежною системою векторів.

Зауважимо, що важливий порядок, в якому розташовані вектори бази, тобто при перестановці векторів бази місцями ми отримуємо іншу базу.

Задача 1.1. Доведіть, що два вектори колінеарні тоді і тільки тоді, коли вони лінійно залежні.

Розв'язання. Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні. Припустимо, що вектор $\vec{a}$ ненульовий (інакше, див. зауваження 1.1.8, система з цих двох векторів лінійно залежна). Тоді, згідно з лемою 1.1.6, знайдеться таке дійсне число $\lambda \in \mathbb{R}$, для якого $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, тобто $\vec{b} - \lambda\vec{a} = \vec{0}$. Це означає, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — лінійно залежні.

Нехай тепер вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ лінійно залежні. Тоді знайдуться такі дійсні числа λ_1, λ_2, які одночасно не дорівнюють нулю, для яких $\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b} = \vec{0}$. Не зменшуючи загальності, припустимо, що $\lambda_1 \neq 0$, тоді $\vec{a} = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{b}$. За означенням множення вектора на число, отримуємо, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є колінеарними.

Твердження 1.1.11. *В одновимірному векторному просторі V_1 будь-який ненульовий вектор є базою цього простору.*

Задача 1.2. Доведіть, що на площині знайдеться два лінійно незалежних вектори. Будь-які три вектори на площині завжди лінійно залежні.

Розв'язання. Виберемо на площині три точки O, M, N, які не належать одній прямій. Тоді вектори $\overrightarrow{OM}$ і $\overrightarrow{ON}$ неколінеарні і згідно з задачею 1.1 — лінійно незалежні.

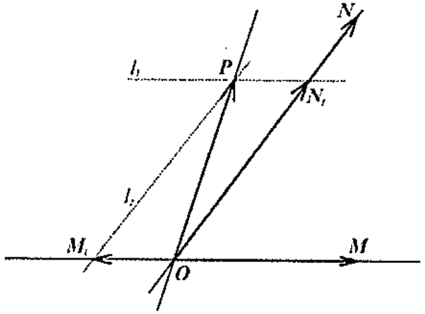


Рис. 2

Нехай вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ лежать в одній площині. Якщо серед них є пара колінеарних векторів, то згідно з задачею 1.1 і зауваженням

1.1.9 система з трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ — лінійно залежна. Розглянемо випадок, коли всі три вектори попарно неколінеарні. Відкладемо їх від однієї точки O так, що $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$, $\overrightarrow{ON} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OP} = \vec{c}$. Отримуємо три різні прямі OM, ON, OP. Проведемо через точку P пряму l_1, яка паралельна до прямої OM. Пряма l_1 перетинає пряму ON в точці N_1. Аналогічно пряма l_2, яка проходить через точку P паралельно до прямої ON, перетинає пряму OM в точці M_1 (див. рис. 2). За означенням паралелограма, чотирикутник OM_1PN_1 є паралелограмом, тому

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{ON_1}.$$

Оскільки вектори $\overrightarrow{OM}$ і $\overrightarrow{ON}$ є ненульовими, то знайдуться такі числа α і β, що $\overrightarrow{OM_1} = \alpha\overrightarrow{OM}$ і $\overrightarrow{ON_1} = \beta\overrightarrow{ON}$.

Отже,

$$\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OM} + \beta\overrightarrow{ON} \quad \text{або } \vec{c} - \alpha\vec{a} - \beta\vec{c} = \vec{0},$$

а це означає, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ — лінійно залежні.

Твердження 1.1.12. *У двовимірному векторному просторі V_2 базою є система будь-яких двох неколінеарних векторів.*

Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називаються *компланарними*, якщо вони належать одній площині або паралельні до однієї площини.

Задача 1.3. Доведіть, що в просторі три вектори компланарні тоді і тільки тоді, коли вони лінійно залежні.

Розв'язання. Необхідність випливає з задачі 1.2.

Нехай вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — лінійно залежні. Тоді знайдуться такі дійсні числа α, β, γ, які одночасно не дорівнюють нулеві, для яких $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$. Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $\alpha \neq 0$, тоді $\vec{a} = -\dfrac{\beta}{\alpha}\vec{b} - \dfrac{\gamma}{\alpha}\vec{c}$. Відкладемо вектори $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{b} = \overrightarrow{ON}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OP}$ від однієї точки O і бачимо, що вектор $\overrightarrow{OM}$ є сумою векторів, колінеарних до векторів $\overrightarrow{ON}$ і $\overrightarrow{OP}$. А це означає, що вектор $\overrightarrow{OM}$ лежить у площині, яка містить прямі ON і OP, тобто вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — компланарні.

Задача 1.4. Доведіть, що в просторі знайдеться три лінійно незалежних вектори. Будь-які чотири вектори в просторі завжди лінійно залежні.

Розв'язання. Виберемо в просторі чотири точки O, M, N, P, які не належать одній площині. Тоді вектори $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ і $\overrightarrow{OP}$ некомпланарні і згідно з задачею 1.3 — лінійно незалежні.

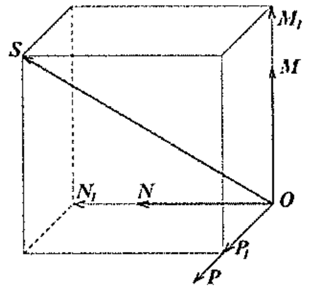


Рис. 3

Нехай у просторі задано вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$. Міркування при доведенні такі самі як і в задачі 1.2, тому розглянемо лише випадок, коли чотири прямі OM, ON, OP, OS, на яких лежать вектори $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$, $\overrightarrow{ON} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OP} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OS} = \vec{d}$, не лежать в одній площині. Побудуємо такий паралелепіпед, що:

1) точка O є однією з його вершин;

2) ребра OM_1, ON_1, OP_1 належать прямим OM, ON, OP, відповідно;

3) відрізок OS є його діагоналлю (див. рис. 3).

Тоді

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{ON_1} + \overrightarrow{OP_1} = \alpha\overrightarrow{OM} + \beta\overrightarrow{ON} + \gamma\overrightarrow{OP}.$$

А це означає, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ — лінійно залежні.

Твердження 1.1.13. *У тривимірному векторному просторі V_3 базою є система будь-яких трьох некомпланарних векторів.*

Означення 1.1.14. *Ортонормованою базою* називається база, вектори якої попарно перпендикулярні і кожен вектор має одиничну довжину.

Теорема 1.1.15. *Нехай $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ — база простору V. Тоді для кожного вектора $\vec{a} \in V$ існує єдиний набір чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ такий, що*

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n.$$

Означення 1.1.16. Якщо $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ — база простору V, то набір чисел $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ таких, що вектор $\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n$, називається *координатами* вектора $\vec{a}$ в базі $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ простору V.

Зауваження 1.1.17. З леми 1.1.6, зокрема, випливає, що вектори, які задані своїми координатами в деякій базі, колінеарні тоді і тільки тоді, коли їхні координати пропорційні.

Приклад 1.1. Точка N належить відрізку AB так, що $|AN| = \lambda|NB|$. Виразіть вектори $\overrightarrow{AN}$ і $\overrightarrow{NB}$ через вектор $\overrightarrow{AB}$.

Розв'язання. За умовою вектор $\overrightarrow{AN} = \lambda\overrightarrow{NB}$, а $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{AB}$. З цих двох рівностей отримуємо $\lambda\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{AB}$, звідки $\overrightarrow{NB} = \dfrac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}$. Тоді

$$\overrightarrow{AN} = \lambda\overrightarrow{NB} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}.$$

Приклад 1.2. Розкладіть вектор $\vec{a} + \vec{b}$ через вектори $\vec{a} - \vec{b}$ і $\vec{a} + 2\vec{b}$.

Розв'язання. Нехай вектор $\vec{a} + \vec{b} = x(\vec{a} - \vec{b}) + y(\vec{a} + 2\vec{b})$. Звідси випливає, що

$$(1 - x - y)\vec{a} + (1 + x - 2y)\vec{b} = 0.$$

Можливі два випадки: вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — неколінеарні, або вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — колінеарні.

Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні. В цьому випадку вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна вважати базою, тобто повною, лінійно незалежною системою векторів. З означення лінійної незалежності отримуємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 1 - x - y = 0 \\ 1 + x - 2y = 0 \end{cases}.$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, одержимо, що $x = \dfrac{1}{3}$, $y = \dfrac{2}{3}$.

Нехай тепер $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — колінеарні вектори. Тоді існує число λ таке, що $\vec{a} = \lambda\vec{b}$. Тоді отримуємо рівняння

$$(1 - x - y)\lambda + (1 + x - 2y) = 0,$$

яке має безліч розв'язків.

Приклад 1.3. Задано трикутник ABC. Точка M належить стороні BC так, що $|BM| : |BC| = 2 : 3$. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AM}$ в базі $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CM}$.

Розв'язання. Нехай $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{CM}$. Тоді $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{MC} = -3\overrightarrow{CM}$ (див. рис. 4). Отже, вектор $\overrightarrow{BC}$ в базі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ має координати $(0; -3)$.

Вектор $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$. Отже, вектор $\overrightarrow{CA}$ в базі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ має координати $(-1; 3)$.

Вектор $\overrightarrow{BM} = -2\overrightarrow{CM} = -2\vec{e}_2$.

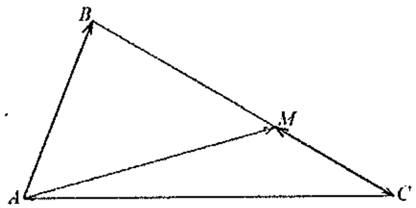


Рис. 4

Тоді $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$. Отож, вектор $\overrightarrow{AM}$ в базі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ має координати $(1; -2)$.

Приклад 1.4. Задано паралелограм $ABCD$, точка K — середина сторони BC, точка O — точка перетину діагоналей. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{KD}$ в базі $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$.

Розв'язання. Нехай $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}$ (див. рис. 5), тоді

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

Отже, вектор $\overrightarrow{BD}$ в базі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ має координати $(-1; 1)$.

Вектор $\overrightarrow{CO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = -\frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2$, отож, вектор $\overrightarrow{CO}$ в базі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ має координати $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

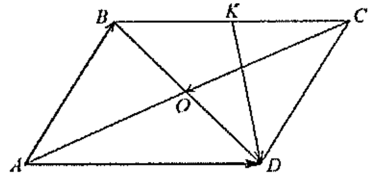


Рис. 5

З рівності $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KD}$ одержуємо

$$\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB},$$

тому вектор $\overrightarrow{KD}$ в базі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ має координати $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

Приклад 1.5. Нехай AD і BC — основи трапеції $ABCD$, і відомо, що $|AD| : |BC| = 3 : 2$. Приймаючи за базу вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$, знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AO}$, де точка O — точка перетину діагоналей трапеції.

Розв'язання. Нехай $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}$.

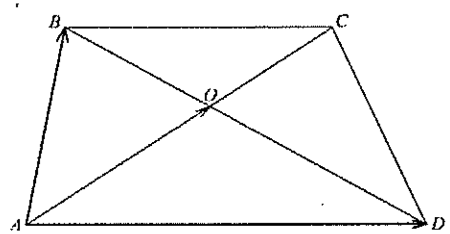


Рис. 6

За умовою задачі $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\vec{e}_2 = \left(0; \frac{2}{3}\right)$. Вектор $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2$, тобто $\overrightarrow{AC} = \left(1; \frac{2}{3}\right)$. Трикутники AOD і COB

подібні (див. рис. 6), тому точка O ділить діагональ AC у відношенні $3:2$, починаючи від вершини A. Отже, вектор $\overrightarrow{AO}$ колінеарний з вектором $\overrightarrow{AC}$ і його довжина становить $\frac{3}{5}$ довжини діагоналі, тому

$$\overrightarrow{AO}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{5}\left(1;\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{3}{5};\frac{2}{5}\right).$$

Задача 1.5. З точки O виходить два неколінеарні вектори $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Знайдіть будь-який вектор, який належить бісектрисі кута AOB.

Розв'язання. Відомо, що сума двох векторів, відкладених від однієї точки, є діагоналлю паралелограма, побудованого на цих векторах. Також відомо, що діагональ ромба є бісектрисою відповідного кута.

Вектори $|\vec{b}|\cdot\vec{a}$ та $|\vec{a}|\cdot\vec{b}$ матимуть однакову довжину, тому паралелограм побудований на цих векторах як на сторонах буде ромбом (див. рис. 7). Отже, вектор $\vec{p}=|\vec{b}|\cdot\vec{a}+|\vec{a}|\cdot\vec{b}$ належить бісектрисі кута AOB.

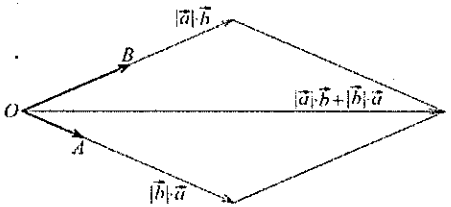


Рис. 7

Задача 1.6. Використовуючи векторну алгебру, доведіть, що бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну сторону у відношенні рівному відношенню двох прилеглих сторін.

Розв'язання. Нехай ABC — довільний трикутник, $|AB|=a$, $|AC|=b$ і AK — бісектриса цього трикутника. Нехай вектор $\overrightarrow{AK}$ має координати $(x;y)$ в базі $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Приймемо $\vec{p}=b\overrightarrow{AB}+a\overrightarrow{AC}$. Позаяк довжини векторів $b\overrightarrow{AB}$ і $a\overrightarrow{AC}$ рівні, то вектор $\vec{p}$ колінеарний бісектрисі $\overrightarrow{AK}$.

Оскільки вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ мають координати $(1;0)$ і $(0;1)$ як

базові вектори, то вектор $\vec{p}$ має координати $(b;a)$. З умови $\vec{p}\parallel\overrightarrow{AK}$ маємо $\frac{x}{b}=\frac{y}{a}$.

Оскільки вектор $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AB}$ і є колінеарним до вектора $\overrightarrow{BC}$ з координатами $(-1;1)$, то вектор $\overrightarrow{BK}$ має координати $(x-1;y)$. З умови колінеарності векторів $\overrightarrow{BK}$ і $\overrightarrow{BC}$ отримуємо ще одне рівняння $\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}$.

Розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases}\frac{x}{b}=\frac{y}{a}\\ \frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}\end{cases}$, отримуємо

$$x=\frac{b}{a+b},\ y=\frac{a}{a+b},$$

і отже, вектор $\overrightarrow{AK}$ має координати $\left(\frac{b}{a+b};\frac{a}{a+b}\right)$.

Оскільки $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AB}$, то

$$\overrightarrow{BK}=\left(\frac{b}{a+b};\frac{a}{a+b}\right)-(1;0)=\left(\frac{-a}{a+b};\frac{a}{a+b}\right).$$

Аналогічно, вектор

$$\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AK}=(0;1)-\left(\frac{b}{a+b};\frac{a}{a+b}\right)=\left(\frac{-b}{a+b};\frac{b}{a+b}\right).$$

Одержали, що вектор $\overrightarrow{BK}=\frac{a}{b}\overrightarrow{KC}$. Тому $\frac{|BK|}{|KC|}=\frac{a}{b}=\frac{|AB|}{|AC|}$.

Приклад 1.6. Задано трикутник ABC, в якому $|AB|=3$, $|AC|=2$. Виразіть координати вектора $\overrightarrow{AK}$ бісектриси кута BAC в базі $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ за умови, що точка K належить стороні BC.

Розв'язання. *Перший спосіб.* Нехай $\overrightarrow{BC}=\vec{e}_1$, $\overrightarrow{CA}=\vec{e}_2$ і вектор $\overrightarrow{AK}$ має координати $(x;y)$ в базі $\vec{e}_1,\vec{e}_2$, тобто $\overrightarrow{AK}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2$.

Згідно з задачею 1.5 вектор $\overrightarrow{AK}$ колінеарний вектору

$$\vec{p}=|\overrightarrow{AC}|\cdot\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|\cdot\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=2(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})+3\overrightarrow{AC}=$$

$$= 2(-\vec{e}_2 - \vec{e}_1) - 3\vec{e}_2 = -2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2, \text{ тобто } \frac{x}{-2} = \frac{y}{-5}.$$

Вектор $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AK} - (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} =$

$$= x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + \vec{e}_2 + \vec{e}_1 = (x+1)\vec{e}_1 + (y+1)\vec{e}_2.$$

Оскільки $\overrightarrow{BK} \| \overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{BC} = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2$, то $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{0}$.

Отже, $y + 1 = 0$. Тоді одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x}{-2} = \frac{y}{-5} \\ y + 1 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, отримуємо, що вектор $\overrightarrow{AK}$ має координати $\left(-\frac{2}{5}; -1\right)$ в базі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

Другий спосіб. За правилом трикутника додавання векторів (див. рис. 8)

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK} = -\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{KC}.$$

Оскільки AK бісектриса кута B трикутника ABC, то $|\overrightarrow{BK}| : |\overrightarrow{KC}| = 3 : 2$.

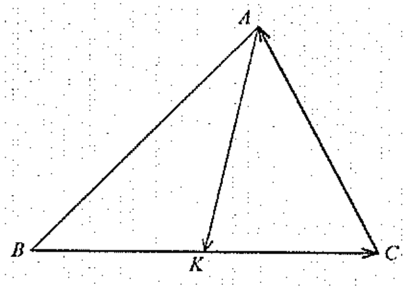


Рис. 8

Згідно з прикладом 1.1, $\overrightarrow{KC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$, тоді $\overrightarrow{AK} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$, тобто вектор $\overrightarrow{AK}$ має координати $\left(-\frac{2}{5}; -1\right)$ в базі $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$.

Задача 1.7. Використовуючи векторну алгебру, доведіть, що медіани трикутника перетинаються в одній точці і точкою перетину діляться у відношенні $2 : 1$, починаючи від вершин трикутника.

Розв'язання. Нехай ABC — довільний трикутник і нехай його медіани AK і BL перетинаються в точці O. Доведемо, що третя медіана CM містить цю точку. Зафіксуємо базу $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}$.

Тоді (див. рис. 9)

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2.$$

Нехай вектор $\overrightarrow{AO}$ має координати $(x; y)$ в базі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Оскільки вектори $\overrightarrow{AO}$ і $\overrightarrow{AK}$ колінеарні, то

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{2}} \text{ або } x = y.$$

Вектор $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AB} = (x; y) - (1; 0) = (x - 1; y)$. А вектор $\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \left(-1; \frac{1}{2}\right)$. Оскільки вектори $\overrightarrow{BO}$ і $\overrightarrow{BL}$ колінеарні, то

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{\frac{1}{2}} \text{ або } x + 2y - 1 = 0.$$

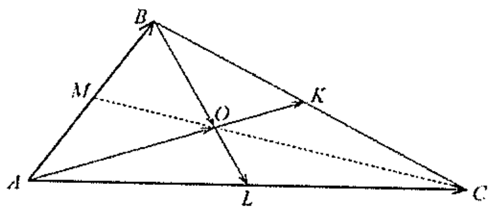


Рис. 9

Розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} x = y \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$, отримуємо координати вектора $\overrightarrow{AO} = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Позаяк вектори $\overrightarrow{AK}=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{AO}=\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$, то вектор $\overrightarrow{AO}=$ $=\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$. Аналогічно вектор

$$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)-(1;0)=\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$$

і вектор $\overrightarrow{BL}=\left(-1;\frac{1}{2}\right)$, то $\overrightarrow{BO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BL}$. Вектори

$$\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)-(0;1)=\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right),$$

$$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{2};-1\right).$$

Очевидно, що $\overrightarrow{CO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CM}$. Отже, вектори $\overrightarrow{CO}$ і $\overrightarrow{CM}$ — колінеарні, тому точка O належить медіані CM. Це свідчить про те, що всі три медіани перетинаються в точці O.

З того, що $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BL}$ і $\overrightarrow{CO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CM}$ випливає, що медіани трикутника точкою перетину діляться у відношенні $2:1$, починаючи від вершин трикутника.

Приклад 1.7. У піраміді $SABC$ точка M є точкою перетину медіан трикутника ABC, а точка P належить ребру SC і ділить його у відношенні $SP:PC=2:3$. Розкладіть вектор $\overrightarrow{MP}$ через вектори $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AS}$.

Розв'язання. Маємо $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{PC}$, вектор $\overrightarrow{PC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{SC}=$ $=\frac{3}{5}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AS})$ (див. рис. 10). Отже, $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MC}-\frac{3}{5}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AS})$.

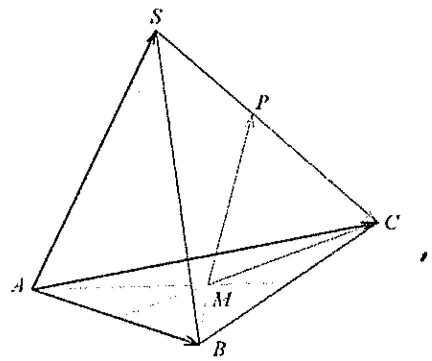


Рис. 10

Знайдемо вектор $\overrightarrow{MC}$. Оскільки M — точка перетину медіан трикутника ABC, то $\overrightarrow{MC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$, де CN — медіана трикутника ABC. Але $\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Отже,

$$\overrightarrow{MC}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

Тоді

$$\overrightarrow{MP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{5}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AS}\right)=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{15}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AS}.$$

Приклад 1.8. Нехай в базі $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ мають, відповідно, координати $\vec{a}=(1;1;2)$, $\vec{b}=(2;1;3)$, $\vec{c}=(5;4;1)$. Чи утворює система векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ базу? У випадку позитивної відповіді знайдіть координати вектора $\vec{d}=(5;1;2)$ в цій базі.

Розв'язання. Щоб система векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ була лінійно залежною, треба, щоб існували числа x, y, z, серед яких хоча б одне відмінне від нуля, такі що $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$, тобто

$$x\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Ми отримали матричне рівняння, яке зводиться до системи рівнянь $\begin{cases} x+2y+5z=0 \\ x+y+4z=0 \\ 2x+3y+z=0 \end{cases}$. Позаяк визначник системи $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 8 \neq 0$, то система має лише нульовий розв'язок $x=y=z=0$. Це означає, що система векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — лінійно незалежна. У просторі кожна лінійно незалежна система з трьох векторів (див. Твердження 1.1.13) утворює базу, тому трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ є базою. Знайдемо координати вектора $\vec{d}$ в цій базі. Подамо вектор $\vec{d}$ як лінійну комбінацію векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \text{ або } \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Маємо $\begin{cases} x+2y+5z=5 \\ x+y+4z=1 \\ 2x+3y+z=2 \end{cases}$. Звідси $\begin{cases} x=-\frac{9}{2} \\ y=\frac{7}{2} \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$. Отже, вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базу і вектор $\vec{d}$ має координати $\left(-\frac{9}{2}; \frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$ в цій базі.

Вправи

1.1.1. Розкладіть вектор $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ через вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$, якщо відомі розклади векторів $\vec{a} = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$, $\vec{b} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{c} = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$ в базі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

1.1.2. Розкладіть вектор $\vec{p} = \frac{3}{5}\vec{a} - \frac{4}{5}\vec{b} + \vec{c}$ через вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$, якщо відомі розклади векторів $\vec{a} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$, $\vec{b} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{c} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$ в базі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

1.1.3. Розкладіть вектор $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ через вектори $\vec{q} = \vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{r} = \vec{a} - \vec{b}$.

1.1.4. Розкладіть вектор $\vec{p} = \vec{a} + 3\vec{b}$ через вектори $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$ і $\vec{r} = 2\vec{a} + \vec{b}$.

1.1.5. На прямій AB розташована точка M. Виразіть через вектор $\overrightarrow{AB}$ вектор $\overrightarrow{AM}$, якщо:

а) точка M розташована між точками A та B так, що $AM : MB = 2 : 3$;

б) точка M розташована поза точками A та B так, що $AM : MB = 2 : 3$.

1.1.6. На прямій AB розташована точка N. Виразіть через вектор $\overrightarrow{AB}$ вектор $\overrightarrow{AN}$, якщо:

а) точка N розташована між точками A та B і $AN : AB = 2 : 3$;

б) точка N розташована поза точками A та B і $AN : AB = 2 : 3$.

1.1.7. В паралелограмі $ABCD$ точка O є точкою перетину діагоналей. Виразіть вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ і $\overrightarrow{CA}$ через вектори $\overrightarrow{AO}$ і $\overrightarrow{BO}$.

1.1.8. У трикутнику ABC відомо, що $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Виразіть через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектори, які належать медіанам трикутника і мають напрям від вершин трикутника до протилежних до цих вершин сторін.

1.1.9. В трикутнику ABC точки P, K, M є серединами сторін AB, BC, AC, відповідно. Відомо, що $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BM} = \vec{b}$. Виразіть через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектор $\overrightarrow{AC}$ та вектори $\overrightarrow{AK}$ і $\overrightarrow{CP}$.

1.1.10. Задано трикутник ABC. Через вектори $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ виразіть вектори $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{NA}$, де точки M, N — середини сторін AC і BC, відповідно.

1.1.11. У трикутнику ABC точка O є точкою перетину медіан BM та AN. Через вектори $\overrightarrow{AN}$ та $\overrightarrow{BM}$ виразіть вектори $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CN}$ і $\overrightarrow{OC}$.

1.1.12. В паралелограмі $ABCD$ точка O є точкою перетину діагоналей, а точка E ділить сторону AD у відношенні $2 : 3$, починаючи від вершини A. Через вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$ виразіть вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{BE}$ та $\overrightarrow{CE}$.

1.1.13. У трапеції $ABCD$ менша основа BC відноситься до більшої основи AD як $1 : 4$. Виразіть через вектори $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AD}$ вектори $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$.

1.1.14. В трапеції $ABCD$ менша основа BC відноситься до більшої основи AD як $2 : 3$. Виразіть через вектори $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{BD}$ вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DA}$.

1.1.15. У паралелограмі $ABCD$ точка O є точкою перетину діагоналей, а точка P розміщена на відрізку AD так, що $AP : AD = 2 : 7$. Через вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ виразіть вектори $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{PB}$ та $\overrightarrow{CP}$.

1.1.16. В паралелограмі $ABCD$ точка M ділить сторону AB у відношенні $1 : 3$, починаючи від вершини B, а точка L розміщена так, що $\overrightarrow{LD} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AD}$. Через вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$ виразіть вектори $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{ML}$, $\overrightarrow{LB}$ та $\overrightarrow{LD}$.

1.1.17. У паралелограмі $ABCD$ точка M ділить сторону AB у відношенні $1:3$, починаючи від вершини B, а точка L розміщена так, що $\overrightarrow{LD} = -\frac{2}{7}\overrightarrow{AD}$. Через вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$ виразіть вектори $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{ML}$, $\overrightarrow{LB}$ та $\overrightarrow{LD}$.

1.1.18. В трикутнику ABC сторони AB, BC, AC мають довжини $3, 4, 6$. Виразіть через вектори $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$ вектори $\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BL}$, де BM, BH, BL — медіана, висота і бісектриса, відповідно.

1.1.19. Нехай O — точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$, причому $AO : AC = 2 : 9$. Виразіть:

а) через $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ вектори $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ і $\overrightarrow{BD}$;

б) через $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BO}$ вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DA}$.

1.1.20. Про трикутник ABC відомо, що $AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 5$, BL — бісектриса трикутника ABC. Через вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CA}$ виразіть вектори $\overrightarrow{BL}$, $\overrightarrow{LC}$ та $\overrightarrow{NC}$, де точка N ділить бісектрису BL у відношенні $2:5$, починаючи від вершини B.

1.1.21. Нехай $ABCDEF$ правильний шестикутник, точка O — центр цього шестикутника. Через вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}$ запишіть вектори $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{OE}$ і $\overrightarrow{DA}$.

1.1.22. Нехай $ABCDEF$ правильний шестикутник. Через вектори $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{BD}$ запишіть вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$ і $\overrightarrow{FA}$.

1.1.23. Нехай $ABCDEF$ правильний шестикутник, точка M ділить сторону BC у відношенні $2:1$, починаючи від вершини B. Через вектори $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MC}$ запишіть вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$ і $\overrightarrow{ME}$.

1.1.24. У піраміді $ABCD$ медіана BK грані ADB ділиться точкою M у відношенні $DM : MK = 3 : 7$. Розкладіть вектор $\overrightarrow{CM}$ за векторами $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}$.

1.1.25. Медіани грані SAB трикутної піраміди $SABC$ перетинаються в точці M, а медіани грані SAC — у точці N, відповідно. Доведіть, що вектор $\overrightarrow{MN}$ колінеарний вектору $\overrightarrow{BC}$, знайдіть відношення $\frac{|\overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{BC}|}$.

1.1.26. Нехай в базі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ мають відповідно координати:

а) $\vec{a} = (5; 2; 1)$, $\vec{b} = (-1; 4; 2)$, $\vec{c} = (-1; -1; 6)$;

б) $\vec{a} = (6; 4; 2)$, $\vec{b} = (-9; 6; 3)$, $\vec{c} = (-3; 6; 3)$;

в) $\vec{a} = (6; -18; 12)$, $\vec{b} = (-8; 24; -16)$, $\vec{c} = (8; 7; 3)$;

г) $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (2; -2; 1)$, $\vec{c} = (4; 0; 3)$.

Чи утворює система векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ базу?

1.1.27. Вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ і $\vec{a}$ задано своїми координатами $\vec{e}_1 = (1; 1; 1)$, $\vec{e}_2 = (1; 1; 2)$, $\vec{e}_3 = (1; 2; 3)$, $\vec{a} = (6; 9; 14)$ в певній базі $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$. Покажіть, що вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ самі утворюють базу. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$ в цій базі.

1.1.28. Нехай ABC — довільний трикутник, точка K розташована на прямій BC між точками B і C так, що $BK : BC = 3 : 5$. Приймаючи за базові вектори $\overrightarrow{KB}$, $\overrightarrow{KA}$, визначте координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{KC}$.

1.1.29. Нехай ABC — довільний трикутник, точка M розташована на стороні BC так, що $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{MC}$, точка K розташована на стороні AC так, що $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Приймаючи за базові вектори $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{KA}$, визначте координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{KC}$ і $\overrightarrow{MA}$.

1.1.30. У паралелограмі $ABCD$ точки M і N належать стороні CD (між точками C та D) так, що $CM : MN : ND = 1 : 2 : 3$. Приймаючи за базові вектори $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$, знайдіть координати векторів $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{ND}$ і $\overrightarrow{BD}$.

1.1.31. В паралелограмі $ABCD$ точки M і N належать стороні AD (між точками A та D) так, що $AM : MN : ND = 3 : 2 : 4$. Приймаючи за базові вектори $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AB}$, знайдіть координати векторів $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{NA}$ і $\overrightarrow{AC}$.

1.1.32. Точка S є точкою перетину продовження бічних сторін AB та CD трапеції $ABCD$. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{OS}$, $\overrightarrow{OD}$ в базі $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SD}$, якщо діагоналі трапеції точкою перетину O діляться у відношенні $3 : 4$.

1.1.33. У рівнобічній трапеції $ABCD$ гострий кут при основі AD дорівнює $60°$, $AB = 4$, $BC = 3$, BH — висота трапеції, опущена на основу AD. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{HD}$, $\overrightarrow{BD}$ в базі $\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{HC}$.

1.1.34. Нехай базовими векторами в правильному шестикутнику $ABCDEF$ є вектори $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AD}$. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EA}$ і $\overrightarrow{CE}$ в цій базі.

1.1.35. В правильному восьмикутнику $ABCDEFGH$ базовими векторами є вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AH}$. Запишіть координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{GH}$ і $\overrightarrow{FA}$ в цій базі.

1.1.36. Задано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Визначте координати векторів $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{D_1B_1}, \overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{D_1B}$ в базі $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{C_1C}$.

1.1.37. Задано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Визначте координати векторів $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{DC_1}$ в базі $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{C_1D_1}$, $\overrightarrow{A_1A}$.

1.1.38. Задано трикутну піраміду $OABC$. Точки K, L, M, N, P, Q — середини ребер OA, OB, OC, AB, AC, BC, відповідно. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{NC}, \overrightarrow{MP}$ і $\overrightarrow{KQ}$ в базі $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

1.1.39. Задано трикутну піраміду $OABC$. Точки K, L, M належать, відповідно, ребрам OA, OB, OC так, що $|\overrightarrow{OK}| : |\overrightarrow{KA}| = 1 : 3$, $|\overrightarrow{OL}| : |\overrightarrow{LB}| = 2 : 1$, $|\overrightarrow{OM}| : |\overrightarrow{OC}| = 1 : 5$. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{OK}$, $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{KB}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{AL}$ в базі $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$.

1.1.40.* У довільному чотирикутнику $ABCD$ знайдіть таку точку O, для якої виконується рівність $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

1.1.41.* В довільній трикутній піраміді $ABCD$ знайдіть таку точку O, для якої виконується рівність $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

1.1.42. * Нехай A, B, C, D, E — довільні точки. Знайдіть і опишіть усі точки O, для яких виконується $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$.

1.1.43.* Задано паралелограм $ABCD$. Доведіть таке: якщо точки K, L, M, N ділять в одному і тому ж відношенні λ напрямлені відрізки $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$, то чотирикутник $KLMN$ також є паралелограмом.

1.1.44.* Доведіть таке: якщо точки K, L, M, N ділять в одному і тому ж відношенні $\lambda \neq 1$ напрямлені відрізки $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$ і чотирикутник $KLMN$ є паралелограмом, то чотирикутник $ABCD$ також є паралелограмом.

1.1.45.* Використовуючи векторну алгебру, доведіть, що бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.

1.2. Системи координат

Афінна система координат в просторі V_n задається точкою O, яка називається *початком системи координат* і базою $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$. Позначаємо афінну систему координат через $O_{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n}$, де O — початок, $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ — база цієї системи координат. На площині V_2 афінну систему координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$ часто позначають O_{xy}, де Ox, Oy — осі системи координат, які задаються початком O і базовими векторами $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, відповідно. Аналогічно, в просторі V_3 афінну систему координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$ позначають O_{xyz}, де Ox, Oy, Oz — осі системи координат, які задаються початком O і базовими векторами $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, відповідно. Площини, які містять дві осі системи координат, називаються *координатними площинами.*

Частковим випадком афінної системи координат є *прямокутна декартова система координат* або просто прямокутна система координат. Так називається афінна система координат, в якої база ортонормована. Зазвичай прямокутну систему координат у просторі позначають $O_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$ і $O_{\vec{i},\vec{j}}$ на площині.

Радіусом-вектором точки M у системі координат $O_{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n}$ називається вектор $\overrightarrow{OM}$.

Координатами точки M у системі координат $O_{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n}$ називають координати її радіуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ в базі $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$.

Нехай у деякій афінній системі координат $O_{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n}$ задано координати точок $A(x_1; \ldots; x_n)$ і $B(y_1; \ldots; y_n)$, тоді вектори

$$\overrightarrow{OA} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n, \quad \overrightarrow{OB} = y_1\vec{e}_1 + \cdots + y_n\vec{e}_n.$$

Оскільки $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, то

$$\overrightarrow{AB} = y_1\vec{e}_1 + \cdots + y_n\vec{e}_n - (x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n) =$$

$$= (y_1 - x_1)\vec{e}_1 + \cdots + (y_n - x_n)\vec{e}_n$$

і координати вектора $\overrightarrow{AB}$ в базі $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ набудуть вигляду:

$$(y_1 - x_1; \ldots; y_n - x_n).$$

Твердження 1.2.1. *Якщо в афінній системі координат $O_{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n}$ відомі координати точок $A(x_1; \ldots; x_n)$ і $B(y_1; \ldots; y_n)$, то вектор*

$\overrightarrow{AB}$ *у цій системі координат має координати*

$$(y_1 - x_1; \dots; y_n - x_n). \tag{1.1}$$

Приклад 1.9. Задано правильний шестикутник $ABCDEF$. Приймаючи за початок координат вершину A, а за базові вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AE}$, знайдіть координати вершин шестикутника і його центра O.

Розв'язання. Позначимо базові вектори заданої системи координат через $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AC}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AE}$. Очевидно, що $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = \vec{e}_1$ і $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE} = \vec{e}_2$ (див. рис. 11). Додавши обидва ці рівняння і використавши рівність $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = = \overrightarrow{OD}$, отримуємо $2\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

Оскільки $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AO}$, то з останньої рівності одержуємо $3\overrightarrow{AO} = = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ або $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2$. Отож, центр O шестикутника має координати $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Вектор $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{FE}$, тоді $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AO} = = \vec{e}_1 - \frac{1}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{3}\vec{e}_2 = \frac{2}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{3}\vec{e}_2$, отже, вершина B має координати $\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

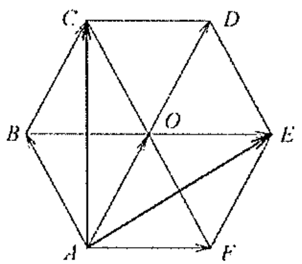


Рис. 11

Позаяк $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$, то вершина D має координати $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Вектор $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{OA} = \vec{e}_2 - \frac{1}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{3}\vec{e}_2 = -\frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2$,

тому F має координати $\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Зрозуміло, що вершини A, C та E мають, відповідно, координати $(0;0)$, $(1;0)$ та $(0;1)$.

Приклад 1.10. Нехай AD і BC — основи трапеції $ABCD$ і $AD : BC = 5 : 2$. Приймаючи за початок координат точку B, а за базові вектори $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AC}$ і $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BD}$, знайдіть координати вершин трапеції, а також координати точки S, — точки перетину прямих, які містять бічні сторони трапеції.

Розв'язання. Оскільки радіус-вектором точки B є нуль-вектор $\overrightarrow{BB}$, то точка B має координати $(0;0)$.

Знайдемо координати радіус-векторів інших точок. За умовою $\overrightarrow{AD} = \frac{5}{2}\overrightarrow{BC}$. За правилом додавання векторів $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$ (див. рис. 12). Або

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{e}_1 \\ \overrightarrow{AB} + \vec{e}_2 = \frac{5}{2}\overrightarrow{BC}. \end{cases}$$

Визначимо вектор $\overrightarrow{AB}$ з обох рівнянь $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \vec{e}_1 - \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{AB} = \frac{5}{2}\overrightarrow{BC} - \vec{e}_2 \end{cases}$.

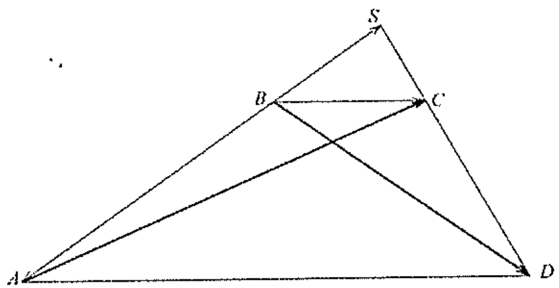


Рис. 12

Звідси $\vec{e}_1 - \overrightarrow{BC} = \frac{5}{2}\overrightarrow{BC} - \vec{e}_2$. Отже, $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{7}\vec{e}_1 + \frac{2}{7}\vec{e}_2$, тобто $\overrightarrow{BC} = = \left(\frac{2}{7}; \frac{2}{7}\right)$ і координати точки $C\left(\frac{2}{7}; \frac{2}{7}\right)$.

Вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{e}_1 - \overrightarrow{BC} = \vec{e}_1 - \frac{2}{7}\vec{e}_1 - \frac{2}{7}\vec{e}_2 = \frac{5}{7}\vec{e}_1 - \frac{2}{7}\vec{e}_2$. Тоді $\overrightarrow{BA} = \left(-\frac{5}{7}; \frac{2}{7}\right)$, отже, точка A має координати $\left(-\frac{5}{7}; \frac{2}{7}\right)$ в системі $B_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$.

Оскільки вектор $\overrightarrow{BD} = \vec{e}_2$, то точка D має координати $(0; 1)$.

Нехай вектор $\overrightarrow{BS}$ має координати $(x; y)$ в базі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Оскільки $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{5}{7}; -\frac{2}{7}\right)$ і вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$ колінеарні, то

$$\frac{x}{\frac{5}{7}} = \frac{y}{-\frac{2}{7}},$$

або $2x + 5y = 0$.

Оскільки вектор

$$\overrightarrow{CS} = \overrightarrow{BS} - \overrightarrow{BC} = (x; y) - \left(\frac{2}{7}; \frac{2}{7}\right) = \left(x - \frac{2}{7}; y - \frac{2}{7}\right),$$

а вектор

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \frac{5}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \left(\frac{5}{7}; \frac{5}{7}\right) - (1; 0) = \left(-\frac{2}{7}; \frac{5}{7}\right),$$

то, враховуючи колінераність векторів $\overrightarrow{CS}$ і $\overrightarrow{CD}$, отримуємо таке:

$$\frac{x - \frac{2}{7}}{-\frac{2}{7}} = \frac{y - \frac{2}{7}}{\frac{5}{7}} \text{ або } 5x + 2y - 2 = 0.$$

Розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 5x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$, отримуємо, що точка S має координати $\left(\frac{10}{21}; -\frac{4}{21}\right)$.

Приклад 1.11. В системі координат $C_{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CC_1}}$ знайдіть координати вершин куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Розв'язання. Знайдемо координати радіус-векторів усіх вершин куба.

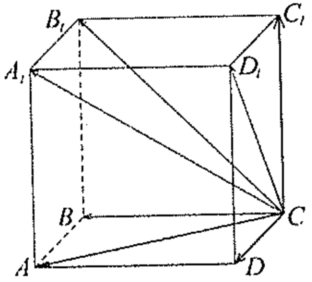


Рис. 13

Початок системи координат точка C має радіус-вектором нуль-вектор, тому її координати $(0; 0; 0)$. Вектори $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CC_1}$ є базовими векторами і радіус-векторами точок D, A, C_1, тому координати цих точок набудуть вигляду $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$, $(0; 0; 1)$, відповідно.

Для визначення координат точок B, A_1, B_1, D_1 запишемо координати радіус-векторів $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA_1}$, $\overrightarrow{CB_1}$, $\overrightarrow{CD_1}$:

$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CD} = (-1; 1; 0)$,

$\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CC_1} = (0; 1; 1)$ за правилом додавання векторів (див. паралелограм CAA_1C_1 на рис. 13),

$\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC_1} = (-1; 1; 1)$,

$\overrightarrow{CD_1} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CC_1} = (1; 0; 1)$.

Координати шуканих вершин будуть такі самі як і координати відповідних радіус-векторів.

Задача 1.8. Доведіть, що відрізки, які з'єднують середини протилежних ребер трикутної піраміди, перетинаються в одній точці і діляться в ній навпіл.

Розв'язання.

Нехай $OABC$ — піраміда, а A_1, B_1, C_1, G_1, F_1, E_1 — середини ребер OA, OB, OC, CA, CB, AB, відповідно.

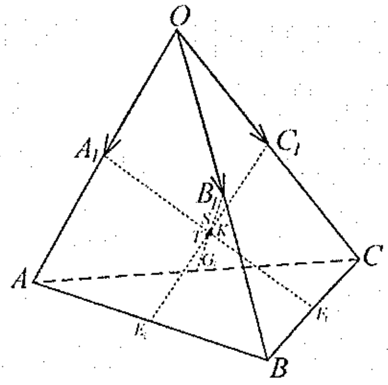


Рис. 14

Зафіксуємо систему координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$, де $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA_1}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OB_1}$ і $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OC_1}$.

Позначимо через K, S, T середини відрізків A_1F_1, B_1G_1, C_1F_1, відповідно (див. рис. 14). Тоді

$$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OF_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA_1} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA_1} + \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OB_1}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OB_1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3\right).$$

Аналогічно

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OG_1}) = \frac{1}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3),$$
$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OE_1}) = \frac{1}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3).$$

Отож, $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OS}$, а це означає, що точки K, S, T збігаються, що і треба було довести.

Вправи

1.2.1. У трикутнику ABC початком системи координат є точка A, а базовими векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$. Визначте в системі координат $A_{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}$ координати вершин трикутника, точки перетину медіан і точки F, яка ділить сторону BC у відношенні $3:2$, починаючи від вершини B.

1.2.2. Задано трикутник ABC. Приймаючи за початок координат вершину A, а за базові вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$, знайдіть координати вершин трикутника і точки O перетину медіан трикутника в системі координат $A_{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}}$.

1.2.3. Задано трикутник ABC. Приймаючи за початок координат вершину C, а за базові вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CA}$, знайдіть координати вершин трикутника і точки O перетину медіан трикутника в вибраній системі координат.

1.2.4. Точка O є точкою перетину медіан трикутника ABC. У системі координат $O_{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}$ визначте координати вершин трикутника ABC.

1.2.5. Точка O є точкою перетину медіан AM та BN трикутника ABC. У системі координат $O_{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}$ визначте координати вершин трикутника ABC та координати точок O, M і N.

1.2.6. У паралелограмі $ABCD$ задано систему координат, початок якої розташований у точці перетину діагоналей O, а базовими векторами є вектори $\overrightarrow{OA}$ та $\overrightarrow{OD}$. Визначте координати вершин паралелограма в системі координат $O_{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}}$.

1.2.7. У деякій афінній системі координат задано координати $A(2;-1)$, $B(-3;-4)$, $C(7;14)$ вершин трикутника ABC. Знайдіть у цій системі координат:

а) координати точки O перетину медіан трикутника;

б) координати точки M, якщо $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$;

в) координати точки N, якщо $\overrightarrow{AN} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.

1.2.8. В паралелограмі $ABCD$ точка S розміщена на стороні AD так, що $AS : AD = 1:4$. Визначте координати вершин паралелограма в системі координат $S_{\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}}$.

1.2.9. Точка W розташована на продовженні сторони AB паралелограма $ABCD$ так, що $AB : BW = 3:1$. Знайдіть координати вершин паралелограма в системі координат $W_{\overrightarrow{WB},\overrightarrow{WD}}$.

1.2.10. Задано трапецію $ABCD$. Відомо, що $AD : BC = 4 : 1$. Приймаючи за початок координат вершину B, а за базові вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$, знайдіть координати вершин трапеції і точки M перетину діагоналей трапеції в вибраній системі координат.

1.2.11. Задано трапецію $ABCD$. Відомо, що $AD : BC = 3 : 2$. Приймаючи за початок координат вершину A, а за базові вектори $\overrightarrow{CB}$ і $\overrightarrow{AC}$, знайдіть координати вершин трапеції і точки M перетину діагоналей трапеції в вибраній системі координат.

1.2.12. Точки M і N ділять більшу основу AD трапеції $ABCD$ на три рівні частини. Приймаючи за початок системи координат точку M, а за базові вектори $\overrightarrow{MN}$ та $\overrightarrow{MB}$, знайдіть координати вершин трапеції в цій системі координат, якщо її менша основа дорівнює відрізку MN.

1.2.13. Задано рівнобічну трапецію $ABCD$, діагональ якої є бісектрисою гострого кута 60°. Точки S і O є точкою перетину продовження бічних сторін і точкою перетину діагоналей, відповідно. В системі координат $S_{\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SO}}$ знайдіть координати вершин трапеції і точок S та O.

1.2.14. У правильному шестикутнику $ABCDEF$ вибрано систему координат $B_{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BE}}$. Знайдіть координати вершин шестикутника в цій системі координат.

1.2.15. В правильному шестикутнику $ABCDEF$ вибрано систему координат $F_{\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FB}}$. Знайдіть координати вершин шестикутника в цій системі координат.

1.2.16. У правильному шестикутнику $ABCDEF$ на діагоналі вибрано точку P так, що $CP : PF = 2 : 5$. Знайдіть координати вершин шестикутника в системі координат $P_{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}}$.

1.2.17. Задано паралелограм $ABCD$, в якому гострий кут 45°, а довжини сторін $AB = \sqrt{2}$, $AD = 5$. З точки B опустили на сторону AD висоту BH. Приймаючи за базові вектори $\overrightarrow{HB}$ та $\overrightarrow{HC}$, а за початок системи координат точку A, знайдіть координати вершин паралелограма в цій системі координат.

1.2.18. У прямокутному трикутнику ABC задано катети $CA = = 3$, $CB = 4$ і бісектрису CL прямого кута C. В системі координат $L_{\overrightarrow{LA},\overrightarrow{LC}}$ визначте координати вершин трикутника.

1.2.19. В прямокутному трикутнику ABC задано катети $AB = 6$, $AC = 8$, висоту AH і медіану AM прямого кута A. У системі координат $B_{\overrightarrow{BH},\overrightarrow{MA}}$ визначте координати вершин трикутника і точок M та H.

1.2.20. У паралелограмі $ABCD$ на стороні AD та на діагоналі AC відзначено точки P і Q так, що $AP = \frac{1}{5}AD$, $AQ = \frac{1}{6}AC$. Доведіть, що вектори $\overrightarrow{PQ}$ і $\overrightarrow{QB}$ колінеарні і знайдіть відношення $\frac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{QB}|}$. Які координати мають вершини паралелограма в системі координат $Q_{\overrightarrow{QA},\overrightarrow{QP}}$?

1.2.21. Задано ромб $ABCD$ з гострим кутом $\angle B = 60°$ та одиничною довжиною сторони. З вершини A проведено висоту AH на сторону BC. У системі координат $D_{\overrightarrow{AH},\overrightarrow{HD}}$ визначте координати вершин ромба та координати точки перетину діагоналей ромба.

1.2.22. В паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ початком системи координат є точка D_1, а базовими векторами $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DD_1}$. Визначте в системі координат $D_1{}_{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{DD_1}}$ координати вершин паралелепіпеда та координати точки перетину діагоналей грані AA_1B_1B.

1.2.23. У паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ початком системи координат є точка C, а базовими векторами $\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{D_1A_1}, \overrightarrow{CC_1}$. У системі координат $C_{\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{D_1A_1},\overrightarrow{CC_1}}$ визначте координати вершин паралелепіпеда та координати точки перетину діагоналей грані BB_1C_1C.

1.2.24. На координатній площині $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$ задано вершини $A(1;2)$, $B(3;5)$, $C(5;-1)$ трикутника ABC. Знайдіть у цій системі координат координати:

а) середини K сторони BC;

б) точки M перетину медіан;

в) точки N — середини середньої лінії трикутника, яка паралельна до сторони BC;

г) точки L, яка ділить сторону BC у відношенні $BL : LC = 2 : 3$.

1.2.25. На координатній площині $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$ задано вершини $A(4;4;6)$, $B(12;10;2)$, $C(20;-2;4)$ трикутної піраміди $OABC$. Знайдіть в цій системі координат координати:

а) точки M перетину медіан грані ABC;

б) точки N, яка ділить відрізок OM у відношенні $ON : NM = = 3 : 1$;

в) точки Z — середини відрізка, який з'єднує середини протилежних ребер піраміди.

1.2.26.* Доведіть, що чотири відрізки, які з'єднують вершини трикутної піраміди з точками перетину медіан протилежних граней, перетинаються в одній точці і діляться в цій точці у відношенні 3 : 1.

1.3. Поділ відрізка у заданому відношенні. Центр ваги системи матеріальних точок

Скажемо, що точка M *ділить напрямлений відрізок* $\overrightarrow{AB}$ *у відношенні* λ ($\lambda \neq -1$), якщо $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$.

Задача 1.9. Нехай у деякій афінній системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$ задано точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $M(x_0; y_0; z_0)$ і точка M ділить напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$ у відношенні λ ($\lambda \neq -1$). Визначте координати точки M через координати точок A і B.

Розв'язання. За умовою задачі $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$, або

$$(x_0 - x_1; y_0 - y_1; z_0 - z_1) = \lambda(x_2 - x_0; y_2 - y_0; z_2 - z_0).$$

Оскільки два вектори рівні тоді і тільки тоді, коли їхні відповідні координати рівні, то отримуємо

$$x_0 - x_1 = \lambda(x_2 - x_0), y_0 - y_1 = \lambda(y_2 - y_0), z_0 - z_1 = \lambda(z_2 - z_0).$$

Звідси

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{\lambda + 1}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{\lambda + 1}, \quad z_0 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{\lambda + 1}. \tag{1.2}$$

Задача 1.10. Нехай у деякій афінній системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$ задано координати n матеріальних точок $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2), \ldots, M_n(x_n; y_n; z_n)$, в яких зосереджено маси m_1, $m_2, \ldots, m_n$, відповідно. Доведіть, що координати центра ваги заданої системи матеріальних точок набувають вигляду:

$$x_0 = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n},$$

$$y_0 = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \cdots + y_n m_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}, \tag{1.3}$$

$$z_0 = \frac{z_1 m_1 + z_2 m_2 + \cdots + z_n m_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}.$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо координати $N(x_N; y_N; z_N)$ центра ваги системи з двох точок $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$ з масами m_1 і m_2, відповідно. Оскільки центр ваги двох мас належить відрізку M_1M_2 і ділить його у відношенні, яке обернено пропорційне масам кінців відрізка, тобто у відношенні $\frac{m_2}{m_1}$, то за формулами (1.2) матимемо

$$x_N = \frac{x_1 + \frac{m_2}{m_1} x_2}{\frac{m_2}{m_1} + 1}, \quad y_N = \frac{y_1 + \frac{m_2}{m_1} y_2}{\frac{m_2}{m_1} + 1}, \quad z_N = \frac{z_1 + \frac{m_2}{m_1} z_2}{\frac{m_2}{m_1} + 1},$$

або

$$x_N = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}, \quad y_N = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2}, \quad z_N = \frac{z_1 m_1 + z_2 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Тепер розглянемо систему точок N і M_3 з масами $m_1 + m_2$ і m_3, відповідно. Знайдемо за формулами (1.2) координати центра ваги N_1 заданої системи:

$$x_{N_1} = \frac{x_1 + \frac{m_3}{m_1+m_2} x_2}{\frac{m_3}{m_1+m_2} + 1} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$y_{N_1} = \frac{y_1 + \frac{m_3}{m_1+m_2} y_2}{\frac{m_3}{m_1+m_2} + 1} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$z_{N_1} = \frac{z_1 + \frac{m_3}{m_1+m_2} z_2}{\frac{m_3}{m_1+m_2} + 1} = \frac{z_1 m_1 + z_2 m_2 + z_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Користуючись методом повної математичної індукції, отримуємо, що координати $(x_0; y_0; z_0)$ центра ваги системи $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $\ldots$, $M_n(x_n; y_n; z_n)$ з n матеріальних точок, в яких зосереджено маси $m_1, m_2, \ldots, m_n$, набувають вигляду:

$$x_0 = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n},$$

$$y_0 = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \cdots + y_n m_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n},$$

$$z_0 = \frac{z_1 m_1 + z_2 m_2 + \cdots + z_n m_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}.$$

Вправи

1.3.1. Нехай у деякій афінній системі координат задано точки $A(-2;1)$ і $B(3;6)$. Знайдіть у цій системі координат координати точки $M(x;y)$, що ділить відрізок AB у відношенні $AM : MB = 3 : 2$, починаючи від вершини A.

1.3.2. Нехай у деякій афінній системі координат задано точки $A(-2;1)$ і $B(3;6)$. Знайдіть у цій системі координат координати точки $M(x;y)$, що ділить напрямлений відрізок AB у відношенні $\overrightarrow{AM} : \overrightarrow{MB} = -3 : 2$.

1.3.3. На кінцях однорідного стержня, довжиною 40 см і масою 500 г насаджено кулі масою 100 і 400 г. Визначте центр ваги цієї системи.

1.3.4. У трьох точках $A\left(7;1\frac{1}{2}\right)$, $B(6;7)$, і $C(2;4)$ деякої афінної системи координат зосереджено маси $60, 100$ і 40 г, відповідно. В цій системі координат знайдіть координати центра ваги заданої системи точок.

1.3.5. В трьох точках $A(-2;4)$, $B(3;-1)$, і $C(2;3)$ деякої афінної системи координат зосереджено маси $60, 40$ і 100 г, відповідно. В цій системі координат знайдіть координати центра ваги заданої системи точок.

1.3.6. У трьох точках $O(0;0)$, $A(2;-5)$, і $B(4;2)$ деякої афінної системи координат зосереджено маси $500, 200$ і 100 г, відповідно. В цій системі координат знайдіть координати центра ваги заданої системи точок.

1.3.7. В трьох точках $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ деякої афінної системи координат зосереджено однакові маси. В цій системі координат знайдіть координати центра ваги цієї системи точок.

1.3.8. Знайдіть координати центра ваги трикутника з вершинами у точках $A(1;-1)$, $B(6;4)$, і $C(2;6)$, якщо координати цих точок задано в деякій афінній системі координат.

1.3.9. Знайдіть координати центра ваги чотирикутної однорідної дошки з вершинами у точках $A(4;4)$, $B(5;7)$, $C(10;10)$, $D(12;4)$, якщо координати цих точок задано в деякій афінній системі координат.

1.3.10. Знайдіть координати центра ваги чотирикутної однорідної дошки з вершинами у точках $A(-2;1)$, $B(3;6)$, $C(5;2)$, $D(0;-6)$, якщо координати цих точок задано в деякій афінній системі координат.

1.3.11. Центр ваги трикутника збігається з початком деякої афінної

системи координат, одна з вершин трикутника розташована на осі абсцис на відстані a від початку координат, друга вершина розташована на осі ординат на відстані b від початку координат. Знайдіть координати третьої вершини стосовно цієї системи координат.

1.3.12. У трикутнику ABC з вершинами в точках $A(4;1)$, $B(7;5)$, $C(-4;7)$, координати яких задано в деякій афінній системі координат, знайдіть координати точки перетину бісектриси кута A з протилежною стороною BC.

1.3.13. В деякій афінній системі координат два подібних трикутники мають спільну вершину $A(3;-6)$ і спільний кут при цій вершині. Знайдіть у цій системі координат координати двох інших вершин більшого трикутника, якщо дві інші вершини меншого трикутника мають координати $B(6,2;-3,6)$, $C(5;1)$, а коефіцієнт подібності трикутників $k = \frac{5}{2}$.

1.3.14. Три послідовні вершини трапеції $ABCD$ мають координати $A(-1;-2)$, $B(1;3)$, $C(9;9)$. Знайдіть координати четвертої вершини D трапеції, координати точки O перетину діагоналей та точки S перетину продовження бічних сторін, якщо довжина основи AD дорівнює 15. Система координат прямокутна.

1.3.15. Три послідовні вершини трапеції $ABCD$ мають координати $A(-3;-2;-1)$, $B(1;2;3)$, $C(9;6;4)$. Знайдіть координати четвертої вершини D трапеції, координати точки O перетину діагоналей та точки S перетину продовження бічних сторін, якщо довжина основи AD дорівнює 15. Система координат прямокутна.

1.3.16. У деякій афінній системі координат задано координати точок $A(-3;5;15)$, $B(0;0;7)$, $C(2;-1;4)$, $D(4;-3;0)$. З'ясуйте, чи перетинаються прямі AB та CD. У випадку позитивної відповіді визначте в цій системі координат координати точки перетину.

1.3.17. Визначте координати центра правильного шестикутника, якщо дві його суміжні вершини розташовані в точках $A(2;0)$, $B(5;3\sqrt{3})$. Система координат прямокутна.

1.3.18. Знайдіть центр ваги і радіус круга, який вписано в трикутник з вершинами $A(9;2)$, $B(0;20)$, $C(-15;-10)$. Система координат прямокутна.

1.3.19.* Доведіть, що для довільної кількості точок $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (на прямій, на площині чи в просторі) існує така єдина точка M, що $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \cdots + \overrightarrow{MA_n} = \overrightarrow{0}$.

1.4. Перетворення координат. Формули переходу від однієї системи координат до іншої

Нехай у просторі задано дві бази $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ і $\vec{e}_1^{\,'}, \vec{e}_2^{\,'}, \vec{e}_3^{\,'}$. Кожен вектор другої бази виражається через вектори першої бази

$$\begin{aligned} \vec{e}_1^{\,'} &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2^{\,'} &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3^{\,'} &= a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3. \end{aligned}$$

У матричній формі це можна записати так:

$$(\vec{e}_1^{\,'}\ \vec{e}_2^{\,'}\ \vec{e}_3^{\,'}) = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Матриця $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ називається *матрицею переходу* від бази $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ до бази $\vec{e}_1^{\,'}, \vec{e}_2^{\,'}, \vec{e}_3^{\,'}$.

Нехай вектор $\vec{a}$ має координати $(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3)$ в базі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ і $(\alpha_1^{'}; \alpha_2^{'}; \alpha_3^{'})$ в базі $\vec{e}_1^{\,'}, \vec{e}_2^{\,'}, \vec{e}_3^{\,'}$.

Тоді

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3 = \alpha_1^{'}\vec{e}_1^{\,'} + \alpha_2^{'}\vec{e}_2^{\,'} + \alpha_3^{'}\vec{e}_3^{\,'} = (\vec{e}_1^{\,'}\ \vec{e}_2^{\,'}\ \vec{e}_3^{\,'}) \begin{pmatrix} \alpha_1^{'} \\ \alpha_2^{'} \\ \alpha_3^{'} \end{pmatrix} =$$

$$= (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^{'} \\ \alpha_2^{'} \\ \alpha_3^{'} \end{pmatrix} =$$

$$= (a_{11}\alpha_1^{'} + a_{12}\alpha_2^{'} + a_{13}\alpha_3^{'})\vec{e}_1 + (a_{21}\alpha_1^{'} + a_{22}\alpha_2^{'} + a_{23}\alpha_3^{'})\vec{e}_2 +$$

$$+ (a_{31}\alpha_1^{'} + a_{32}\alpha_2^{'} + a_{33}\alpha_3^{'})\vec{e}_3.$$

Оскільки вектори виражаються через вектори бази однозначно, то отримуємо

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_{11}\alpha_1^{'} + a_{12}\alpha_2^{'} + a_{13}\alpha_3^{'} \\ \alpha_2 &= a_{21}\alpha_1^{'} + a_{22}\alpha_2^{'} + a_{23}\alpha_3^{'} \\ \alpha_3 &= a_{31}\alpha_1^{'} + a_{32}\alpha_2^{'} + a_{33}\alpha_3^{'} \end{aligned}. \tag{1.4}$$

Формули (1.4) називаються *формулами переходу* від координат вектора в базі $\vec{e}_1^{\,'}, \vec{e}_2^{\,'}, \vec{e}_3^{\,'}$ до координат цього вектора в базі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Тепер нехай задано дві афінні системи координат $O_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3}$ і $O^{'}_{\vec{e}_1^{\,'}, \vec{e}_2^{\,'}, \vec{e}_3^{\,'}}$ в просторі. Нехай матриця $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ є матрицею переходу від бази $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ до бази $\vec{e}_1^{\,'}, \vec{e}_2^{\,'}, \vec{e}_3^{\,'}$ і точка $O^{'}$ має координати $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ в системі координат $O_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3}$, тобто $\overrightarrow{OO^{'}} = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + z_0\vec{e}_3$.

Нехай довільна точка M простору має координати $(x;\ y;\ z)$ в системі координат $O_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3}$ і $(x^{'};\ y^{'};\ z^{'})$ в системі координат $O^{'}_{\vec{e}_1^{\,'}, \vec{e}_2^{\,'}, \vec{e}_3^{\,'}}$.

Це означає, що

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \ \text{ і } \ \overrightarrow{O^{'}M} = x^{'}\vec{e}_1^{\,'} + y^{'}\vec{e}_2^{\,'} + z^{'}\vec{e}_3^{\,'}.$$

Позаяк $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO^{'}} + \overrightarrow{O^{'}M}$, то

$$(\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + (\vec{e}_1^{\,'}\ \vec{e}_2^{\,'}\ \vec{e}_3^{\,'}) \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \\ z^{'} \end{pmatrix} =$$

$$= (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \\ z^{'} \end{pmatrix} =$$

$$= (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3) \left[\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \\ z^{'} \end{pmatrix} \right].$$

З однозначності розкладу вектора за базою матимемо

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \\ z^{'} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

або

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + x_0 \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + y_0 \\ z = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + z_0. \end{cases} \qquad (1.6)$$

Формули (1.6) називаються *формулами переходу* (або *формулами перетворення*) від координат точки в системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$ до координат цієї точки в системі координат $O'_{\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}',\vec{e}_3{}'}$.

Приклад 1.12. Задано паралелограм $ABCD$. Знайдіть формули переходу від системи координат $A_{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}$ до системи координат $D_{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}}$.

Розв'язання. Запишемо матрицю переходу від бази $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ до бази $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}$. Координати векторів $\overrightarrow{DA}$ і $\overrightarrow{DC}$ в базі $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ становитимуть $(0;-1)$ і $(1;0)$, відповідно, тому шукана матриця переходу набуває вигляду $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Знайдемо координати точки D в системі координат $A_{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}$. Оскільки вектор $\overrightarrow{AD}$ має координати $(0;1)$, то точка D також має координати $(0;1)$ в системі координат $A_{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}$. Отже, формули переходу від системи координат $A_{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}$ до системи координат $D_{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}}$ записуємо так:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.13. Нехай ABC — довільний трикутник. Напишіть формули переходу від системи координат $A_{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}}$ до системи координат $B_{\overrightarrow{CK},\overrightarrow{AL}}$, де CK і AL — медіани трикутника ABC.

Розв'язання. Запишемо матрицю переходу від бази $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ до бази $\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{AL}$. Для цього знайдемо координати векторів $\overrightarrow{CK}$ і $\overrightarrow{AL}$ в базі $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$.

Оскільки $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, то шукана матриця переходу набуває вигляду $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Знайдемо координати точки B у системі координат $A_{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}}$. Оскільки вектор $\overrightarrow{AB}$ має координати $(1;0)$, то точка B також має координати $(1;0)$ в системі координат $A_{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}}$.

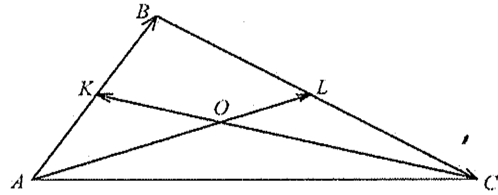


Рис. 15

Отже, формули переходу від системи координат $A_{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}}$ до системи координат $B_{\overrightarrow{CK},\overrightarrow{AL}}$ набувають вигляду

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.14. У паралелограмі $ABCD$ точка L ділить сторону BC у відношенні $3:2$, починаючи від вершини B. Знайдіть формули переходу від системи координат $L_{\overrightarrow{LA},\overrightarrow{LD}}$ до системи координат $D_{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{CD}}$. Обчисліть координати точки M у системі координат $D_{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{CD}}$, якщо відомо її координати $(2;-1)$ в системі координат $L_{\overrightarrow{LA},\overrightarrow{LD}}$.

Розв'язання. Позначимо базові вектори обох систем координат $\vec{e}_1 = \overrightarrow{LA}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{LD}$ та $\vec{e}_1{}' = \overrightarrow{DA}$, $\vec{e}_2{}' = \overrightarrow{CD}$, відповідно. З трикутника ABL отримаємо $\vec{e}_1 = \dfrac{3}{5}\vec{e}_1{}' + \vec{e}_2{}'$, а з трикутника LCD : $\vec{e}_2 = -\dfrac{2}{5}\vec{e}_1{}' + \vec{e}_2{}'$. Тоді $(\vec{e}_1\, \vec{e}_2) = \left(\vec{e}_1{}'\, \vec{e}_2{}'\right) \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

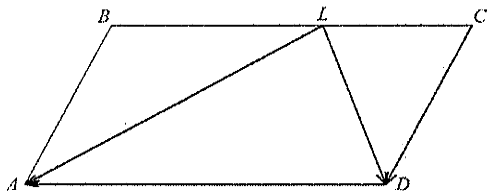


Рис. 16

Позаяк $\overrightarrow{DL} = \dfrac{2}{5}\vec{e}_1^{\,\prime} - \vec{e}_2^{\,\prime}$, то початок першої системи координат L у другій системі має координати $\left(\dfrac{2}{5}; -1\right)$, тому формули переходу від системи координат $D_{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{CD}}$ до системи координат $L_{\overrightarrow{LA},\overrightarrow{LD}}$ в матричному вигляді можна записати так:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Якщо точка M у першій системі координат має координати $(x; y) = (2; -1)$, то в другій вона матиме координати

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Запишемо формули переходу від системи координат $L_{\overrightarrow{LA},\overrightarrow{LD}}$ до системи координат $D_{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{CD}}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' - \frac{2}{5} \\ y' + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} \\ -1 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.15. Нехай у деякій системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$ задано точку A з координатами $(2; 1; 5)$. Напишіть формули переходу від системи координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$ до системи координат $A_{\vec{e}_2,\vec{e}_1,\vec{e}_3}$.

Розв'язання. Оскільки матриця $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ є матрицею переходу від бази $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ до бази $\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3$, а точка A є початком нової системи координат, то шукані формули переходу набувають вигляду:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.16. Нехай у деякій системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$ задано точки $A(1; 2; 3), B(-1; -2; 4), C(0; 1; 2), D(3; -2; 1)$ і множина π точок, координати яких задовольняють рівняння $x + 2y - z + 5 = 0$. Нехай $\vec{e}_1^{\,\prime} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2^{\,\prime} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{e}_3^{\,\prime} = \overrightarrow{CD}$. Знайдіть:

а) матрицю переходу від бази $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ до бази $\vec{e}_1^{\,\prime}, \vec{e}_2^{\,\prime}, \vec{e}_3^{\,\prime}$;

б) формули переходу від системи координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$ до системи координат $B_{\vec{e}_1^{\,\prime},\vec{e}_2^{\,\prime},\vec{e}_3^{\,\prime}}$;

в) напишіть рівняння множини точок π в системі координат $B_{\vec{e}_1^{\,\prime},\vec{e}_2^{\,\prime},\vec{e}_3^{\,\prime}}$.

Розв'язання. Оскільки вектори $\vec{e}_1^{\,\prime}$, $\vec{e}_2^{\,\prime}$, $\vec{e}_3^{\,\prime}$, відповідно, дорівнюють векторам $\overrightarrow{AB} = (-2; -4; 1)$, $\overrightarrow{BC} = (1; 3; -2)$, $\overrightarrow{CD} = (3; -3; -1)$, то матриця переходу від бази $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ до бази $\vec{e}_1^{\,\prime}, \vec{e}_2^{\,\prime}, \vec{e}_3^{\,\prime}$ набуває вигляду $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -4 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Врахувавши, що точка B є початком нової системи координат, отримуємо формули переходу від системи координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$ до системи координат $B_{\vec{e}_1^{\,\prime},\vec{e}_2^{\,\prime},\vec{e}_3^{\,\prime}}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -4 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Підставимо отримані формули переходу в рівняння, що визначає множину π :

$$-2x' + y' + 3z' - 1 + 2(-4x' + 3y' - 3z' - 2) - (x' - 2y' - z' + 4) + 5 = 0.$$

Після спрощення отримуємо, що множина точок π у системі координат $B_{\vec{e}_1^{\,\prime},\vec{e}_2^{\,\prime},\vec{e}_3^{\,\prime}}$ має рівняння $11x' - 9y' + 2z' + 4 = 0$.

Вправи

1.4.1. На площині задано трикутник ABC з медіаною CM. Знайдіть матрицю переходу від бази $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CM}$ до бази $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BC}$.

1.4.2. На площині задано трикутник ABC з медіаною AM. Знайдіть матрицю переходу від бази $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ до бази $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{MA}$.

1.4.3. У паралелограмі $ABCD$ точка O є точкою перетину діагоналей. Знайдіть матрицю переходу від бази $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD}$ до бази $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$.

1.4.4. В паралелограмі $ABCD$ точка K ділить діагональ AC у відношенні $1 : 4$, починаючи від вершини C. Знайдіть матрицю переходу від бази $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ до бази $\overrightarrow{KB}$, $\overrightarrow{KD}$.

1.4.5. У паралелограмі $ABCD$ точки M, N ділять діагональ BD та сторону AD так, що $\overrightarrow{BD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{ND}$. Знайдіть матрицю переходу від бази $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ до бази $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{ND}$.

1.4.6. Знайдіть матрицю переходу від бази $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ до бази $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ в трапеції $ABCD$ основи BC та AD якої відносяться як $5:6$.

1.4.7. Точка O є точкою перетину діагоналей трапеції $ABCD$ і ділить діагоналі у відношенні $1:5$. Знайдіть матрицю переходу від бази $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ до бази $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DA}$.

1.4.8. У трапеції точка S є точкою перетину продовження бічних сторін трапеції $ABCD$. Відомо, що середня лінія трапеції вдвічі більша від меншої основи. Знайдіть матрицю переходу від бази $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SD}$ до бази $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}$.

1.4.9. В правильному шестикутнику $ABCDEF$ знайдіть матрицю переходу від бази $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$ до бази $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{OF}$, де O — центр шестикутника.

1.4.10. У правильному шестикутнику $ABCDEF$ знайдіть матрицю переходу від бази $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$ до бази $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BF}$.

1.4.11. Задано матрицю переходу $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ від бази $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ до бази $\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$. Знайдіть:

а) матрицю переходу від бази $\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ до бази $\vec{e}_1, \vec{e}_2$;

б) координати вектора $\vec{a}$ в базі $\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$, якщо він має координати $(4;6)$ в базі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$;

в) координати вектора $\vec{b}$ в базі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, якщо він має координати $(2;1)$ в базі $\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$.

1.4.12. Задано матрицю переходу $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ від бази $\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ до бази $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Знайдіть:

а) матрицю переходу від бази $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ до бази $\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$;

б) координати вектора $\vec{a}$ в базі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, якщо він має координати $(4;6)$ в базі $\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$;

в) координати вектора $\vec{b}$ в базі $\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$, якщо він має координати $(2;1)$ в базі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

1.4.13. Точки K і L є серединами сторін AB і BC трикутника ABC. Знайдіть формули переходу від системи координат $K_{\overrightarrow{KL},\overrightarrow{KA}}$ до системи координат $A_{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}$.

1.4.14. O — точка перетину медіан трикутника ABC. Знайдіть формули переходу від системи координат $A_{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}}$ до системи координат $O_{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}$.

1.4.15. У паралелограмі $ABCD$ точка E належить діагоналі BD так, що $BE : BD = 1 : 5$. Знайдіть формули переходу від системи координат $E_{\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}}$ до системи координат $A_{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}$.

1.4.16. У паралелограмі $ABCD$ точка E належить діагоналі AC так, що $AE : EC = 3 : 2$. Знайдіть координати $(x;y)$ точки площини в системі координат $B_{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}$, якщо відомі її координати (x', y') в системі координат $E_{\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}}$.

1.4.17. В паралелограмі $ABCD$ зі сторонами $AB = 1$, $AD = 3$ точка P є перетином бісектриси кута A і сторони BC. Знайдіть формули переходу від системи координат $P_{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PD}}$ до системи координат $C_{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CP}}$.

1.4.18. У рівнобічній трапеції $ABCD$ менша основа BC та висота BH мають одиничну довжину, гострий кут A становить $45°$. Знайдіть формули переходу від системи координат $A_{\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AB}}$ до системи координат $C_{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}}$.

1.4.19. У прямокутній трапеції $ABCD$ менша основа BC та висота CH мають одиничну довжину, гострий кут D становить $30°$. Знайдіть формули переходу від системи координат $B_{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}$ до системи координат $D_{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{HD}}$.

1.4.20. В правильному шестикутнику $ABCDEF$ знайдіть формули переходу від системи координат $C_{\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CF}}$ до системи координат $A_{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}$.

1.4.21. В правильному шестикутнику $ABCDEF$ на діагоналі CF розташована точка M так, що $CM : CF = 3 : 5$. Знайдіть формули переходу від системи координат $C_{\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CB}}$ до системи координат $M_{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MD}}$.

1.4.22. На площині задано дві системи координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$ і $O'_{\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'}$. Початок O' другої системи координат стосовно першої системи координат має координати $(-1;3)$, а базові вектори $\vec{e}_1{}'$ і $\vec{e}_2{}'$ мають в базі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ координати $(2;3)$ та $(1;1)$, відповідно. Знайдіть:

а) координати $(x;y)$ точки M у першій системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$, якщо відомі координати $(x';y')$ цієї точки в другій системі координат

$O'_{\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'}$;

б) координати $(x';y')$ точки N у другій системі координат $O'_{\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'}$, якщо відомі координати $(x;y)$ цієї точки в першій системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$;

в) координати точки O в другій системі координат.

1.4.23. На площині задано дві системи координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$ і $O'_{\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}',\vec{e}_3{}'}$. Початок O' другої системи координат стосовно першої системи координат має координати $(1;1;2)$, а базові вектори $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$ і $\vec{e}_3{}'$ мають в базі $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ координати $(4;2;1)$, $(5;3;2)$ та $(3;2;1)$, відповідно. Знайдіть:

а) координати $(x;y;z)$ точки M у першій системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$, якщо відомі координати $(x';y';z')$ цієї точки в другій системі координат $O'_{\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}',\vec{e}_3{}'}$;

б) координати $(x';y';z')$ точки N у другій системі координат $O'_{\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}',\vec{e}_3{}'}$, якщо відомі координати $(x;y;z)$ цієї точки в першій системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$;

в) координати точки O в другій системі координат.

1.4.24. Задано формули переходу $\begin{cases} x' = x - 2y + 1 \\ y' = 3x + 2y - 1 \end{cases}$ від системи координат $O'_{\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'}$ до системи координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$. Знайдіть:

а) матрицю переходу від бази $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ до бази $\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'$;

б) матрицю переходу від бази $\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'$ до бази $\vec{e}_1,\vec{e}_2$;

в) координати початку O системи координат Oxy в системі $O'x'y'$;

г) координати початку O' системи координат $O'x'y'$ в системі Oxy;

ґ) формули переходу від системи координат Oxy до системи координат $O'x'y'$.

1.4.25. Задано формули переходу $\begin{cases} x = 3x' - 2y' + 3 \\ y = 3x' + y' - 1 \end{cases}$ від системи координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$ до системи координат $O'_{\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'}$. Знайдіть:

а) матрицю переходу від бази $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ до бази $\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'$;

б) матрицю переходу від бази $\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'$ до бази $\vec{e}_1,\vec{e}_2$;

в) координати початку O системи координат Oxy в системі $O'x'y'$;

г) координати початку O' системи координат $O'x'y'$ в системі Oxy;

ґ) формули переходу від системи координат $O'x'y'$ до системи координат Oxy.

1.4.26. Нехай у деякій системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$ задано точки $A(-2;1), B(3;0)$, $C(1;-1)$ і множина l точок, координати яких задовольняють рівняння $2x - 3y + 1 = 0$. Нехай $\vec{e}_1{}' = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2{}' = \overrightarrow{CA}$.

а) Знайдіть матрицю переходу від бази $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ до бази $\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'$.

б) Напишіть формули переходу від системи координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$ до системи координат $B_{\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'}$.

в) Напишіть рівняння множини точок l у системі координат $B_{\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'}$.

1.4.27. Нехай у деякій системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$ задано точки $A(-1;1;0), B(3;2;1)$, $C(4;0;-1), D(2;2;1)$ і множина π точок, координати яких задовольняють рівняння $3x - y + 2z - 1 = 0$. Нехай $\vec{e}_1{}' = \overrightarrow{BA}$, $\vec{e}_2{}' = \overrightarrow{DB}$, $\vec{e}_3{}' = \overrightarrow{AC}$.

а) Знайдіть матрицю переходу від бази $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ до бази $\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}',\vec{e}_3{}'$.

б) Знайдіть формули переходу від системи координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$ до системи координат $C_{\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}',\vec{e}_3{}'}$.

в) Напишіть рівняння множини точок π у системі координат $B_{\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}',\vec{e}_3{}'}$.

1.4.28.* Стосовно деякої афінної системи координат Oxy задано рівняння двох прямих $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ і $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, що не перетинаються та координати $(x_0;y_0)$ точки E, що не належить жодній з цих прямих. Приймаючи ці прямі, відповідно, за вісь абсцис і вісь ординат, а точку E за початок нової системи координат $Ex'y'$, запишіть вираження координат $(x';y')$ довільної точки M у системі координат $Ex'y'$, через її старі координати $(x;y)$ в системі координат Oxy.

1.5. Скалярний добуток векторів

Нехай $\vec{a},\vec{b}$ — ненульові вектори. Відкладемо від деякої точки O вектори $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

Означення 1.5.1. *Кутом між векторами* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ називається менший з кутів між променями OA і OB.

Для довільних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ отримаємо $0 \leqslant \angle(\vec{a},\vec{b}) \leqslant \pi$.

Означення 1.5.2. *Скалярним добутком* двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку їхніх довжин на косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b}). \tag{1.7}$$

Теорема 1.5.3. *Нехай у деякій ортонормованій базі задано вектори* $\vec{a} = (\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)$ *і* $\vec{b} = (\beta_1;\beta_2;\beta_3)$. *Скалярний добуток цих векторів обчислюють за формулою*

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3. \tag{1.8}$$

Теорема 1.5.4. *Нехай* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *— довільні вектори,* α *— довільне дійсне число. Тоді:*

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;

2) $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b} = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$;

3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

Через $\vec{a}^{\,2}$ позначаємо скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{a}$, очевидно, що

$$\vec{a}^{\,2} = \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2.$$

Твердження 1.5.5. *Скалярний добуток* $\vec{a}\cdot\vec{b}$ *двох ненульових векторів* $\vec{a}$ *та* $\vec{b}$ *дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли вектори* $\vec{a}$ *та* $\vec{b}$ *перпендикулярні.*

Означення 1.5.6. Функція g, яка кожній впорядкованій парі векторів ставить у відповідність число, називається *метричною*, якщо вона має такі властивості:

1) для довільних векторів $\vec{a},\vec{b}$ і довільного дійсного числа $\lambda\in\mathbb{R}$ виконується рівність $g(\lambda\vec{a},\vec{b}) = \lambda g(\vec{a},\vec{b})$;

2) для довільних векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ правильна рівність $g(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = g(\vec{a},\vec{c}) + g(\vec{b},\vec{c})$;

3) для довільних векторів $\vec{a},\vec{b}$ виконується умова симетричності, тобто $g(\vec{a},\vec{b}) = g(\vec{b},\vec{a})$;

4) для довільного одиничного вектора $\vec{a}$ завжди $g(\vec{a},\vec{a}) = 1$.

Задача 1.11. Доведіть, що в просторі існує єдина метрична функція g, де $g(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$ для довільних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Розв'язання. Зафіксуємо довільну ортонормовану базу $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. Кожній впорядкованій парі векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ поставимо у відповідність число

$$g(\vec{a},\vec{b}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3,$$

де $(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)$, $(\beta_1;\beta_2;\beta_3)$ координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ в базі $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, відповідно. Доведемо, що така функція g є метричною!

Нехай $\vec{a} = (\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)$, $\vec{b} = (\beta_1;\beta_2;\beta_3)$, $\vec{c} = (\gamma_1;\gamma_2;\gamma_3)$ довільні вектори задані своїми координатами в базі $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ і λ довільне дійсне число. Тоді:

1) $g(\lambda\vec{a},\vec{b}) = (\lambda\alpha_1)\beta_1 + (\lambda\alpha_2)\beta_2 + (\lambda\alpha_3)\beta_3 = \lambda(\alpha_1\beta_1 + +\alpha_2\beta_2 + +\alpha_3\beta_3) = \lambda g(\vec{a},\vec{b})$;

2) $g(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = (\alpha_1+\beta_1)\gamma_1 + (\alpha_2+\beta_2)\gamma_2 + (\alpha_3+\beta_3)\gamma_3 = (\alpha_1\gamma_1 + +\alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3) + (\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3) = g(\vec{a},\vec{c}) + g(\vec{b},\vec{c})$;

3) $g(\vec{a},\vec{b}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = \beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 + \beta_3\alpha_3 = g(\vec{b},\vec{a})$.

4) Нехай $\vec{a}_0$ довільний одиничний вектор. Відкладемо вектори $\vec{a}_0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ від деякої фіксованої точки O. Зафіксуємо вектор $\vec{b}_0$, який виходить з точки O і належить площинам $O_{\vec{i},\vec{j}}$ і $O_{\vec{k},\vec{b}_0}$.

Нехай $\varphi = \angle(\vec{i},\vec{b}_0)$, а $\psi = \angle(\vec{a}_0,\vec{k})$, тоді $\vec{b}_0 = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}$. Отже,

$$\vec{a}_0 = \sin\psi\vec{b}_0 + \cos\psi\vec{k} = \sin\psi(\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}) + \cos\psi\vec{k} =$$

$$= \sin\psi\cos\varphi\vec{i} + \sin\psi\sin\varphi\vec{j} + \cos\psi\vec{k} = (\sin\psi\cos\varphi;\sin\psi\sin\varphi;\cos\psi).$$

Тоді $g(\vec{a}_0,\vec{a}_0) = \sin\psi\cos\varphi\cdot\sin\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi\cdot\sin\psi\sin\varphi +$

$$+\cos\psi\cdot\cos\psi = \sin^2\psi(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \cos^2\psi = 1.$$

Виконання умов 1)–4) доводить існування необхідної метричної функції.

Доведемо єдиність такої метричної функції. Нехай g довільна метрична функція, спочатку доведемо, що для довільних взаємно перпендикулярних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується умова $g(\vec{a},\vec{b}) = 0$.

Нехай $\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\vec{b}_0 = \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$. Вектор $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{a}_0 + \vec{b}_0)$ є одиничним, тоді, використовуючи властивості метричної функції g, отримаємо

$$1 = g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{a}_0+\vec{b}_0), \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{a}_0+\vec{b}_0)\right) = \frac{1}{2}(g(\vec{a}_0,\vec{a}_0) + 2g(\vec{a}_0,\vec{b}_0)+$$

$$+g(\vec{b}_0,\vec{b}_0)) = \frac{1}{2}(1 + 2g(\vec{a}_0,\vec{b}_0) + 1) = 1 + g(\vec{a}_0,\vec{b}_0).$$

Звідси, $g(\vec{a}_0,\vec{b}_0) = 0$. Отож,

$$g(\vec{a},\vec{b}) = g(|\vec{a}|\vec{a}_0, |\vec{b}|\vec{b}_0) = |\vec{a}||\vec{b}|g(\vec{a}_0,\vec{b}_0) = 0.$$

Розглянемо два довільні вектори $\vec{a} = (\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)$, $\vec{b} = (\beta_1;\beta_2;\beta_3)$, координати яких задано в деякій ортонормованій базі $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. Застосовуючи властивості метричної функції, отримуємо

$$g(\vec{a},\vec{b}) = g(\alpha_1\vec{i}+\alpha_2\vec{j}+\alpha_3\vec{k}, \beta_1\vec{i}+\beta_2\vec{j}+\beta_3\vec{k}) = \alpha_1\beta_1 g(\vec{i},\vec{i}) + \alpha_1\beta_2 g(\vec{i},\vec{j})+$$

$$+\alpha_1\beta_3 g(\vec{i},\vec{k}) + \alpha_2\beta_1 g(\vec{j},\vec{i}) + \alpha_2\beta_2 g(\vec{j},\vec{j}) + \alpha_2\beta_3 g(\vec{j},\vec{k}) + \alpha_3\beta_1 g(\vec{k},\vec{i})+$$

$$+\alpha_3\beta_2 g(\vec{k},\vec{j}) + \alpha_3\beta_3 g(\vec{k},\vec{k}) = \alpha_1\beta_1\cdot 1 + \alpha_1\beta_2\cdot 0 + \alpha_1\beta_3\cdot 0 + \alpha_2\beta_1\cdot 0+$$

$$+\alpha_2\beta_2\cdot 1 + \alpha_2\beta_3\cdot 0 + \alpha_3\beta_1\cdot 0 + \alpha_3\beta_2\cdot 0 + \alpha_3\beta_3\cdot 1 = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3.$$

Ця рівність свідчить про єдиність метричної функції g.

Зауваження 1.5.7. Нехай $\vec{a},\vec{b}$ два довільні ненульові вектори і $\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\vec{b}_0 = \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$. Відкладемо вектори $\vec{a}_0$, $\vec{b}_0$ від деякої фіксованої точки O. Зафіксуємо такий одиничний вектор $\vec{c}_0$, що вектори $\vec{a}_0$, $\vec{b}_0$, $\vec{c}_0$ компланарні і вектор $\vec{c}_0$ перпендикулярний до $\vec{a}_0$. Нехай $\varphi = \angle(\vec{a}_0,\vec{b}_0)$, тоді

$$g(\vec{a},\vec{b}) = g(|\vec{a}|\vec{a}_0, |\vec{b}|\vec{b}_0) = |\vec{a}||\vec{b}|g(\vec{a}_0,\vec{b}_0) = |\vec{a}||\vec{b}|g(\vec{a}_0, \cos\varphi\vec{a}_0 + \sin\varphi\vec{c}_0) =$$

$$= |\vec{a}||\vec{b}|(\cos\varphi g(\vec{a}_0,\vec{a}_0) + \sin\varphi g(\vec{a}_0,\vec{c}_0)) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi.$$

Приклад 1.17. Відомо, що $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\pi}{3}$. Знайдіть:

а) довжину вектора $\vec{a} - 2\vec{b}$;

б) кут між векторами $\vec{a} - 2\vec{b}$ і $2\vec{a} - \vec{b}$.

Розв'язання. Маємо

$$|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{(\vec{a}-2\vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 4\vec{b}^2} =$$

$$= \sqrt{|\vec{a}|^{\ 2} - 4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) + 4|\vec{b}|^{\ 2}} = \sqrt{1 - 4\cdot 1\cdot 2\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot 4} = \sqrt{13}.$$

Аналогічно обчислюємо $|2\vec{a} - \vec{b}| = 2$ і

$$(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b}) = 2\vec{a}^{\ 2} - 5\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{b}^{\ 2} = 2|\vec{a}|^2 - 5|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3} + 2|\vec{b}|^2 = 5.$$

За означенням скалярного добутку

$$\cos\angle(\vec{a}-2\vec{b}, 2\vec{a}-\vec{b}) = \frac{(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}-2\vec{b}|\cdot|2\vec{a}-\vec{b}|} = \frac{5}{\sqrt{13}\cdot 2} = \frac{5\sqrt{13}}{26}.$$

Отже, $\varphi = \arccos\dfrac{5\sqrt{13}}{26}$.

Приклад 1.18. В трикутнику ABC сторони AB, BC і AC мають довжини 5, 3 і 6, відповідно. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AH}$ в базі $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$, за умови, що точка H є основою висоти, опущеної з вершини A.

Розв'язання. *Перший спосіб.* Нехай $\overrightarrow{AB} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{BC} = \vec{e}_2$ і вектор $\overrightarrow{AH}$ має координати $(x;y)$ в базі $\vec{e}_1,\vec{e}_2$, тобто, $\overrightarrow{AH} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$. Очевидно, що $\vec{e}_1^{\,2} = \overrightarrow{AB}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 = 25$, $\vec{e}_2^{\,2} = \overrightarrow{BC}^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 = 9$.

Оскільки, $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, то $(\vec{e}_1+\vec{e}_2)^2 = \overrightarrow{AC}^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 = 36$. Звідси

$$\vec{e}_1^{\,2} + 2\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 + \vec{e}_2^{\,2} = 36,\ 2(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2) = 36 - 25 - 9,\ \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 = 1.$$

Позаяк вектор $\overrightarrow{AH}$ перпендикулярний до вектора $\overrightarrow{BC}$, то скалярний добуток $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$. Тобто,

$$(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2)\cdot\vec{e}_2 = 0,\ x(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2) + y\vec{e}_2^{\,2} = 0,\ x + 9y = 0.$$

Оскільки точка H належить прямій BC, то вектор $\overrightarrow{BH}$ колінеарний вектору $\overrightarrow{BC}$. Вектор $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 - \vec{e}_1 = (x-1)\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$. Вектор $\overrightarrow{BC} = 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2$.

З умови колінеарності векторів $\overrightarrow{BH}$ і $\overrightarrow{BC}$ одержуємо $\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y}{1}$, звідси $x - 1 = 0$.

Розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} x + 9y = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$, отримуємо шукані координати вектора $\overrightarrow{AH} = \left(1; -\dfrac{1}{9}\right)$.

Другий спосіб. З трикутника ABH (див. рис.17) маємо $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}$. Оскільки сума квадратів довжин сторін AB і BC є меншою, ніж квадрат довжини сторони AC, то кут B — тупий, тому точка H належить прямій BC ззовні вершини B. Вектор $\overrightarrow{BH}$ колінеарний до вектора $\overrightarrow{BC}$ і коефіцієнт колінеарності $k = -\dfrac{|\overrightarrow{BH}|}{|\overrightarrow{BC}|}$.

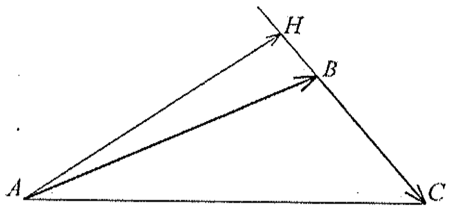


Рис. 17

Визначимо довжину відрізка BH. Трикутники ABH і CAH є прямокутними і кут B — тупий, тому

$$|AH|^2 = 25 - |BH|^2 = 36 - (3 + |BH|)^2.$$

Звідси $|BH| = \dfrac{1}{3}$, отже, $k = -\dfrac{\frac{1}{3}}{3} = -\dfrac{1}{9}$ і $\overrightarrow{BH} = -\dfrac{1}{9}\overrightarrow{BC}$. Підставимо $\overrightarrow{BH}$ у першу рівність і отримуємо $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{9}\overrightarrow{BC}$, тобто вектор $\overrightarrow{AH}$ в базі $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ має координати $\left(1; -\dfrac{1}{9}\right)$.

Приклад 1.19. Довжини базових векторів афінної системи координат $|\vec{e}_1| = 1$, $|\vec{e}_2| = 2$, $|\vec{e}_3| = 2$, кути між ними $\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \frac{\pi}{3}$, $\angle(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = \frac{\pi}{2}$, $\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = \frac{2\pi}{3}$. Стосовно цієї системи координат задано вершини трикутника $A(-2;2;1), B(-2;-1;0), C(-1;0;1)$. Знайдіть довжини сторін трикутника і кут BAC.

Розв'язання. Оскільки $\overrightarrow{AB} = (0;-3;-1)$, $\overrightarrow{BC} = (1;1;1)$, $\overrightarrow{AC} = (1;-2;0)$, то $\overrightarrow{AB} = -3\vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\overrightarrow{BC} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\overrightarrow{AC} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$.

Спочатку знайдемо скалярні добутки

$$\vec{e}_1^{\,2} = |\vec{e}_1|^2 = 1, \quad \vec{e}_2^{\,2} = |\vec{e}_2|^2 = 4, \quad \vec{e}_3^{\,2} = |\vec{e}_3|^2 = 4,$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = |\vec{e}_1||\vec{e}_2| \cos\frac{\pi}{3} = 1, \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = |\vec{e}_1||\vec{e}_3| \cos\frac{2\pi}{3} = -1,$$

$$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = |\vec{e}_2||\vec{e}_3| \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Знайдемо довжини сторін трикутника

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (-3\vec{e}_2 - \vec{e}_3)^2 = 9\vec{e}_2^{\,2} + 6\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 + \vec{e}_3^{\,2} = 9 \cdot 4 + 6 \cdot 0 + 4 = 40,$$

$$|\overrightarrow{BC}|^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)^2 = \vec{e}_1^{\,2} + \vec{e}_2^{\,2} + \vec{e}_3^{\,2} + 2\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + 2\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 + 2\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 =$$

$$= 1 + 4 + 4 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = 9,$$

$$|\overrightarrow{AC}|^2 = \overrightarrow{AC}^2 = (\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2)^2 = \vec{e}_1^{\,2} - 4\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_2^{\,2} = 1 - 4 \cdot 1 + 4 \cdot 4 = 13,$$

отже, $|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{10}$, $|\overrightarrow{BC}| = 3$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{13}$.

Визначимо кут BAC трикутника. Для цього обчислимо скалярний добуток

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-3\vec{e}_2 - \vec{e}_3) \cdot (\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2) = -3\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + 6\vec{e}_2^{\,2} - \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 + 2\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 =$$

$$= -3 \cdot 1 + 6 \cdot 4 - 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = 22.$$

Отже, $\cos\angle BAC = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{11}{\sqrt{130}}$.

Тоді $\angle BAC = \arccos\left(\dfrac{11}{\sqrt{130}}\right)$.

Задача 1.12. Знайдіть вектор, який є ортогональною проекцією вектора $\vec{a}$ на ненульовий вектор $\vec{b}$. Розгляньте частковий числовий випадок $\vec{a} = (1;4;8)$, $\vec{b} = (1;2;-2)$. Система координат прямокутна.

Розв'язання. Відкладаємо вектори $\vec{a}, \vec{b}$ від однієї точки O: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Нехай C — ортогональна проекція точки A на пряму OB. Шуканою проекцією є вектор $\overrightarrow{OC}$. Очевидно, $\overrightarrow{OC} = \lambda\vec{b}$. Позаяк $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \lambda\vec{b} - \vec{a}$, то $(\lambda\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{b} = 0$.

Звідси $\lambda = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b}^{\,2}}$. Отже, $pr_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\,\vec{b}$.

У випадку $\vec{a} = (1;4;8), \vec{b} = (1;2;-2)$ маємо

$$pr_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 8 \cdot 2}{1+4+4}\,(1;2;-2) = \left(-\frac{7}{9}; -\frac{14}{9}; \frac{14}{9}\right).$$

Вправи

1.5.1. Задано два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ такі, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$. Знайдіть: а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $\vec{a} \cdot \vec{a}$, $\vec{b} \cdot \vec{b}$; в) $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b})$; г) $(3\vec{a} - 5\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$.

1.5.2. Задано два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ такі, що $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$. Знайдіть: а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $\vec{a} \cdot \vec{a}$, $\vec{b} \cdot \vec{b}$; в) $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - 3\vec{b})$; г) $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (3\vec{a} + 4\vec{b})$.

1.5.3. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a} = (-3;1;1)$ і $\vec{b} = (2;5;0)$, які задано в прямокутній системі координат.

1.5.4. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a} = (2;0;-7)$ і $\vec{b} = (1;-1;1)$, які задано в прямокутній системі координат.

1.5.5. Обчисліть $\vec{a} \cdot \vec{a} - 3\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{c}$, якщо відомо, що $\vec{a} = 4\vec{m} - \vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$, $\vec{c} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$, де $\vec{m}$ і $\vec{n}$ взаємно перпендикулярні одиничні вектори.

1.5.6. Знайдіть одиничний вектор $\vec{e}$ колінеарний до вектора $\vec{p} = 6\vec{i} - 7\vec{j} - 6\vec{k}$.

1.5.7. Знайдіть кут між векторами $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ і $\vec{b} = \vec{i} + 5\vec{j}$.

1.5.8. Перевірте, які з рівностей виконуються для довільних ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

а) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$; б) $(\vec{a} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^3$;

в) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2$; г) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$;

ґ) $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2$; д) $\vec{a} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b}$; е) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{b}) = |\vec{b}|^2 \cdot \vec{a}$.

1.5.9. Які ненульові вектори задовольняють умову:

а) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$; б) $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$; в) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$;

г) $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$; ґ) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$.

1.5.10. Знайдіть геометричне місце точок M площини, для кожної з яких $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{AB}|$, де A і B задані точки площини.

1.5.11. Знайдіть гострий кут рівнобічної трапеції $ABCD$ з основами AB і CD, якщо відомо, що $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{AD}|$.

1.5.12. Для довільних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ доведіть правильність рівності

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 2(\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b})$$

та з'ясуйте її геометричний зміст.

1.5.13. У рівносторонньому трикутнику ABC сторони мають одиничну довжину. Обчисліть $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$.

1.5.14. Гострий кут ромба $ABCD$ становить $60°$, а сторони мають одиничну довжину. Обчисліть $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD}$.

1.5.15. Доведіть, що вектори $\vec{d} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) - \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c})$ і $\vec{c}$ ортогональні для довільних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

1.5.16. Задано послідовні вершини паралелограма $A(1;-2)$, $B(3;1)$, $C(4;-2)$. Визначте косинус гострого кута між прямими AC і BD, якщо D — четверта вершина паралелограма. Система координат прямокутна.

1.5.17. Задано три послідовні вершини паралелограма $A(-1;-3)$, $B(2;1)$, $C(3;-2)$. Визначте косинус тупого кута між прямими CA і BD, якщо D — четверта вершина паралелограма. Система координат прямокутна.

1.5.18. Обчисліть скалярний добуток векторів $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ і $\vec{n} = \vec{a} + 4\vec{b}$, де $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні одиничні вектори.

1.5.19. Одиничні вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$ утворюють кут $120°$. Обчисліть кут (у градусах) між векторами $2\vec{a} + 4\vec{c}$ і $\vec{a} - \vec{c}$.

1.5.20. Який кут (у градусах) утворюють одиничні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо вектори $\vec{a} + 2\vec{b}$ і $5\vec{a} - 4\vec{b}$ взаємно перпендикулярні?

1.5.21. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$ утворюють кут $120°$, а $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{c}| = 5$. Для якого значення параметра m вектори $m\vec{a} + 17\vec{c}$ і $3\vec{a} - \vec{c}$ будуть взаємно перпендикулярними?

1.5.22. Обчисліть (у градусах) кут між векторами $3\vec{a} + 2\vec{b}$ і $\vec{a} + 5\vec{b}$, якщо одиничні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні.

1.5.23. Знайдіть довжину вектора $\vec{m} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$, якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні одиничні вектори.

1.5.24. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$ утворюють кут $120°$ і $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{c}| = 9$. Обчисліть $|\vec{a} - \vec{c}|^2$.

1.5.25. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$ утворюють кут $60°$ і $|\vec{a}| = 9$, $|\vec{c}| = 1$. Обчисліть $|\vec{a} - \vec{c}|^2$.

1.5.26. Обчисліть довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{m} = 5\vec{a} + 2\vec{b}$ і $\vec{n} = \vec{a} - 3\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 3$ і $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.

1.5.27. Одиничні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $60°$. Обчисліть суму квадратів довжин діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $2\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - 2\vec{b}$.

1.5.28. Обчисліть довжину вектора $\vec{a}$, якщо відомо, що його третя координата дорівнює 2 і він перпендикулярний до векторів $\vec{b} = (4; -1; -5)$ і $\vec{c} = (2; 1; -4)$. Система координат прямокутна.

1.5.29. На площині Oxy знайдіть такий вектор $\vec{a}$, який перпендикулярний до вектора $\vec{b} = (5; -3; 4)$ і має ту саму довжину, що і вектор $\vec{b}$. Система координат прямокутна.

1.5.30. На площині Oxz знайдіть такий вектор $\vec{a}$, який перпендикулярний до вектора $\vec{b} = (5; -3; 4)$ і має довжину, вдвічі більшу, ніж вектор $\vec{b}$. Система координат прямокутна.

1.5.31. Знайдіть вектор, який є ортогональною проекцією вектора $(-14; 2; 5)$ на паралельну пряму до вектора $(2; -2; 1)$. Система координат прямокутна.

1.5.32. Знайдіть вектор, який є ортогональною проекцією вектора $(1; -1; 2)$ на паралельну пряму до вектора $(2; -2; 4)$. Система координат прямокутна.

1.5.33. Знайдіть вектор, який є ортогональною проекцією вектора $(8; 4; 1)$ на перпендикулярну до вектора $(2; -2; 1)$ площину. Система координат прямокутна.

1.5.34. Знайдіть вектор, який є ортогональною проекцією вектора $(7; 3; 1)$ на перпендикулярну до вектора $(2; -2; 1)$ площину. Система координат прямокутна.

1.5.35. Задано три вектори $\vec{a} = (8; 4; 1)$, $\vec{b} = (2; -2; 1)$, $\vec{c} = (1; 1; 9)$. Знайдіть ортогональну проекцію вектора $\vec{c}$ на площину, яка містить вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Система координат прямокутна.

1.5.36. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, вектор $\vec{c}$ утворює кут $\frac{\pi}{3}$ з вектором $\vec{a}$ і кут $\frac{2\pi}{3}$ з вектором $\vec{b}$ та відомо, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 4$. Обчисліть:

а) $(3\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$; б) $(2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$;

в) $|\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}|$; г) кут між векторами $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ і $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

1.5.37. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$ взаємно перпендикулярні, вектор $\vec{b}$ утворює кут $\frac{\pi}{3}$ з вектором $\vec{a}$ і кут $\frac{2\pi}{3}$ з вектором $\vec{c}$ та відомо, що $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 4$. Обчисліть:

а) $(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$; б) $(2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$;

в) $|\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}|$; г) кут між векторами $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ і $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

1.5.38. У трикутнику ABC сторони AB, BC, AC мають довжини $2, 3, 4$, відповідно, BH — висота, опущена з вершини B на сторону AC. Знайдіть:

а) координати вектора $\overrightarrow{BH}$ в базі $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}$;

б) формули переходу від системи координат $A_{\overrightarrow{BH},\overrightarrow{AC}}$ до системи координат $B_{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}}$;

в) формули переходу від системи координат $A_{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}$ до прямокутної системи координат $H_{\vec{i},\vec{j}}$, де $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{BH}}{|\overrightarrow{BH}|}$, $\vec{j} = \dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$.

1.5.39. В трикутнику ABC сторони AB, BC, AC мають довжини $3, 5, 6$, відповідно, AH — висота, опущена з вершини A на сторону BC. Знайдіть:

а) координати вектора $\overrightarrow{AH}$ в базі $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$;

б) формули переходу від системи координат $A_{\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AC}}$ до системи координат $B_{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}}$;

в) формули переходу від системи координат $A_{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}$ до прямокутної системи координат $H_{\vec{i},\vec{j}}$, де $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{HA}}{|\overrightarrow{HA}|}$, $\vec{j} = \dfrac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}$.

1.5.40. Базові вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ мають одиничні довжини. Знайти кут між базовими векторами, якщо вектори $\vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ і $\vec{b} = 5\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$ взаємно перпендикулярні.

1.5.41. Базові вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ мають одиничні довжини. Знайдіть кут між базовими векторами, якщо вектори $\vec{a} = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ і $\vec{b} = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ взаємно перпендикулярні.

1.5.42. Про афінну систему координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$ відомо, що $|\vec{e}_1| = 2$, $|\vec{e}_2| = 3$, $\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_2) = \frac{\pi}{3}$. Обчисліть довжину вектора $\vec{a} = (-4;6)$ в цій системі координат.

1.5.43. Про афінну систему координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$ відомо, що $|\vec{e}_1| = 3$, $|\vec{e}_2| = 5$, $\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_2) = \frac{2\pi}{3}$. Обчисліть довжину вектора $\vec{a} = (-1;4)$ в цій системі координат.

1.5.44. Задано афінну систему координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$, в якій базові вектори мають довжини $|\vec{e}_1| = 5$, $|\vec{e}_2| = 2$ і кут між ними $\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_2) = \frac{\pi}{6}$. Знайдіть кут між векторами $\vec{a} = (0;4)$, $\vec{b} = (-2;0)$ у цій системі координат.

1.5.45. Задано афінну систему координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$, в якій базові вектори мають довжини $|\vec{e}_1| = 4$, $|\vec{e}_2| = 3$ і кут між ними $\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_2) = \frac{2\pi}{3}$. Знайдіть кут між векторами $\vec{a} = (5;0)$, $\vec{b} = (0;-2)$ у цій системі координат.

1.5.46. Довжини базових векторів $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ афінної системи координат, відповідно, дорівнюють 2 і 3, а кут між ними дорівнює $\frac{\pi}{3}$. Стосовно цієї системи координат задано вершини трикутника $A(-1;0), B(2;3), C(1;-2)$. Визначте довжини сторін AB і AC цього трикутника і косинус кута A між ними.

1.5.47. Довжини базових векторів $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ афінної системи координат, відповідно, дорівнюють 1 і 2, а кут між ними дорівнює $\frac{2\pi}{3}$. Стосовно цієї системи координат задано вершини трикутника $A(-1;2), B(0;3), C(1;-2)$. Визначте довжини сторін CB і CA цього трикутника і косинус кута C між ними.

1.5.48. Довжини базових векторів $|\vec{e}_1| = 2$, $|\vec{e}_2| = \sqrt{3}$ афінної системи координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$, а кут між ними $\frac{5\pi}{6}$. Стосовно цієї системи координат задано два вектори $\vec{a} = (1;2)$ і $\vec{b} = (2;2)$. Знайдіть кут від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$.

1.5.49. Стосовно афінної системи координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$ задано трикутник ABC з вершинами в точках $A(1;1)$, $B(5;3)$, $C(3;5)$ та довжинами сторін $AB = \sqrt{52}$, $BC = \sqrt{28}$, $AC = 4$. Визначте довжини векторів бази $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ та кут між ними.

1.5.50. Стосовно афінної системи координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$ задано прямокутний трикутник ABC з вершинами в точках $A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(3;2)$, прямим кутом при вершині C і катетами $CA = 2$, $CB = 3$. Визначте довжини векторів бази $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ і кут між ними.

1.5.51. Довжини базових векторів афінної системи координат $|\vec{e}_1| = 2$, $|\vec{e}_2| = 1$, $|\vec{e}_3| = 2$, а кути між ними $\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_2) = \frac{2\pi}{3}$, $\angle(\vec{e}_2,\vec{e}_3) = \frac{\pi}{2}$, $\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_3) = \frac{\pi}{3}$. Стосовно цієї системи координат задано вершини трикутника $A(-1;0;1), B(-2;1;0), C(-3;2;1)$. Знайдіть периметр і кути трикутника.

1.5.52. Довжини базових векторів афінної системи координат $|\vec{e}_1| = 3$, $|\vec{e}_2| = 1$, $|\vec{e}_3| = 1$, а кути між ними $\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_2) = \frac{\pi}{2}$, $\angle(\vec{e}_2,\vec{e}_3) = \frac{2\pi}{3}$, $\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_3) = \frac{\pi}{3}$. Стосовно цієї системи координат задано вершини трикутника $A(1;2;3), B(-2;-1;0), C(-2;0;1)$. Знайдіть периметр і кути трикутника.

1.5.53.* Задано прямокутник $ABCD$ і точку M, що розташована в площині прямокутника. Доведіть, що:

а) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}$;

б) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MD}$.

1.5.54.* Знайдіть суму векторів, які є ортогональними проекціями довільного вектора $\vec{a}$ на сторони рівностороннього трикутника.

1.5.55.* Доведіть, що за довільного розташування точок A, B, C, D на площині виконується рівність

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0.$$

1.5.56.* Доведіть, що за довільного розташування точок A, B, C, D на площині виконується рівність

$$|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 + |\overrightarrow{DA}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2 + 4|\overrightarrow{PQ}|^2,$$

якщо точки P і Q є серединами $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$ відповідно.

1.5.57.* Опишіть множину розв'язків рівняння $\vec{a}\cdot\vec{x} = c$, де $\vec{a},\vec{x}$ — вектори на площині (в просторі).

1.6. Орієнтація простору

Нехай у просторі задано дві бази $\vec{e}_1,...,\vec{e}_n$ і $\vec{e}_1^{\,\prime},...,\vec{e}_n^{\,\prime}$. Скажемо, що ці дві бази *однаково орієнтовані*, якщо визначник матриці переходу від однієї бази до іншої — додатний.

Твердження 1.6.1. *Відношення однакової орієнтовності на множині всіх баз простору є відношенням еквівалентності.*

Задача 1.13. Доведіть, що відношення еквівалентності розбиває множину всіх баз векторного простору V на два класи, які або не перетинаються, або збігаються.

Розв'язання. Виберемо довільну базу $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ векторного простору V і зауважимо, що матриця переходу від бази $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ до бази $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_{n-1}, (-\vec{e}_n)$ (в початковій базі змінили напрям останнього базового вектора на протилежний) набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & ... & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Визначник цієї матриці дорівнює -1, тому ці дві бази не однаково орієнтовані, тобто належать до різних класів еквівалентності.

Тепер доведемо, що будь-яка інша база $\vec{e}_1^{\,'}, ..., \vec{e}_n^{\,'}$ векторного простору V належить до одного з двох класів, або до того, до якого належить база $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$, або до того, до якого належить база $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_{n-1}, (-\vec{e}_n)$. Якщо бази $\vec{e}_1^{\,'}, ..., \vec{e}_n^{\,'}$ і $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ однаково орієнтовані, то вони належать до одного класу еквівалентності, якщо ж не однаково орієнтовані, то матриця переходу $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ до бази $\vec{e}_1^{\,'}, ..., \vec{e}_n^{\,'}$ має від'ємний визначник і матриця переходу від бази $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_{n-1}, (-\vec{e}_n)$ до бази $\vec{e}_1^{\,'}, ..., \vec{e}_n^{\,'}$ має, відповідно, додатний визначник (як добуток двох матриць з від'ємними визначниками). Отже, ці бази однаково орієнтовані.

Один з класів ми називаємо *правим* (або *додатним*), інший — *лівим* (або *від'ємним*). Кажуть, що бази, які належать до правого класу, мають *праву* (або *додатну*) *орієнтацію*, до лівого — *ліву* (або *від'ємну*) *орієнтацію*.

База на прямій, яка розташована горизонтально, називається *правою*, якщо базовий вектор направлений зліва направо, в протилежному випадку база називається *лівою*. База на прямій, яка розташована вертикально, називається *правою*, якщо базовий вектор направлений знизу вверх, у протилежному випадку база називається *лівою*.

База на площині називається *правою*, якщо найкоротший поворот від першого базового вектора до другого відбувається проти годинникової стрілки, якщо ж найкоротший поворот від першого базового вектора до другого відбувається за годинниковою стрілкою, то така база називається *лівою*.

База в просторі називається *правою*, якщо, дивлячись з кінця третього вектора, найкоротший поворот від першого базового вектора до другого відбувається проти годинникової стрілки, якщо ж, дивлячись з кінця третього вектора, найкоротший поворот від першого базового вектора до другого відбувається за годинниковою стрілкою, то така база називається *лівою*.

Твердження 1.6.2. *Якщо на площині задано дві прямокутні системи координат* $O_{\vec{i},\vec{j}}$ *та* $O'_{\vec{i}\,',\vec{j}\,'}$, *то формули перетворення набувають вигляду*

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - \varepsilon y'\sin\alpha + x_0 \\ y = x'\sin\alpha + \varepsilon y'\cos\alpha + y_0 \end{cases},$$

де α — *кут між векторами* $\vec{i}$ *та* $\vec{i}\,'$; $(x_0; y_0)$ — *координати точки* O' *в системі координат* $O_{\vec{i},\vec{j}}$ *та*

$\varepsilon = 1$, *якщо системи координат* $O_{\vec{i},\vec{j}}$ *і* $O'_{\vec{i}\,',\vec{j}\,'}$

однаково орієнтовані;

$\varepsilon = -1$, *якщо системи координат* $O_{\vec{i},\vec{j}}$ *і* $O'_{\vec{i}\,',\vec{j}\,'}$

протилежно орієнтовані.

Приклад 1.20. Нехай $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — три некомпланарні вектори. Знайдіть матрицю переходу від бази $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ до бази $\vec{c}, -\vec{a}, \vec{b}$. Визначте, чи ці бази однаково орієнтовані.

Розв'язання. Позначимо вектори $\begin{cases} \vec{e}_1 = \vec{a} \\ \vec{e}_2 = \vec{b} \\ \vec{e}_3 = \vec{c} \end{cases}$ і $\begin{cases} \vec{e}_1^{\,'} = \vec{c} \\ \vec{e}_2^{\,'} = -\vec{a} \\ \vec{e}_3^{\,'} = \vec{b} \end{cases}$. Між векторами першої бази $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ і векторами другої бази $\vec{e}_1^{\,'}, \vec{e}_2^{\,'}, \vec{e}_3^{\,'}$ отримаємо такі співвідношення:

$$\begin{cases} \vec{e}_1^{\,'} = \vec{c} = \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2^{\,'} = -\vec{a} = -\vec{e}_1 \\ \vec{e}_3^{\,'} = \vec{b} = \vec{e}_2 \end{cases}.$$

Тоді матрицею переходу від бази $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ до бази $\vec{e}_1^{\,\prime}, \vec{e}_2^{\,\prime}, \vec{e}_3^{\,\prime}$ є матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник $\det A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0.$

Отож, бази $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ і $\vec{e}_1^{\,\prime}, \vec{e}_2^{\,\prime}, \vec{e}_3^{\,\prime}$ мають різну орієнтацію.

Приклад 1.21. На площині задано паралелограм $ABCD$. Точка M — точка перетину діагоналей паралелограма. Знайдіть матрицю переходу від бази $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MA}$ до бази $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AC}$. Визначте, чи ці бази однаково орієнтовані.

Розв'язання. Позначимо $\overrightarrow{AB} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{MA} = \vec{e}_2$ і $\overrightarrow{DA} = \vec{e}_1^{\,\prime}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{e}_2^{\,\prime}$. Виразимо вектори $\vec{e}_1^{\,\prime}, \vec{e}_2^{\,\prime}$ через вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

Вектори $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{MA} = -2\vec{e}_2$.
$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = -(-2\vec{e}_2) + \vec{e}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$.

Отримали такі співвідношення $\begin{cases} \vec{e}_1^{\,\prime} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2^{\,\prime} = -2\vec{e}_2 \end{cases}$. Матриця переходу від бази $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ до бази $\vec{e}_1^{\,\prime}, \vec{e}_2^{\,\prime}$ набуде вигляду $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Обчисливши визначник $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2$, можна зробити висновок, що бази $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MA}$ і $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AC}$ мають різну орієнтацію.

Вправи

1.6.1. На площині задано трикутник ABC. Точка K розташована на стороні BC так, що $|\overrightarrow{BK}| : |\overrightarrow{KC}| = 2 : 3$. Визначте чи однаково орієнтовані бази $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{BC}$ та $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BK}$.

1.6.2. На площині задано трикутник ABC. Точка M розташована на стороні AC так, що $|\overrightarrow{AM}| : |\overrightarrow{MC}| = 3 : 4$. Визначте чи однаково орієнтовані бази $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MC}$ та $\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CB}$.

1.6.3. Точка O є точкою перетину діагоналей трапеції $ABCD$ і ділить діагоналі у відношенні $1 : 4$. Знайдіть матрицю переходу від

бази $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD}$ до бази $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ та визначте чи однаково орієнтовані ці бази.

1.6.4. В трапеції точка S є точкою перетину продовження бічних сторін трапеції $ABCD$. Відомо, що середня лінія трапеції втричі більша від меншої основи. Знайдіть матрицю переходу від бази $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SD}$ до бази $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DB}$ та визначте чи однаково орієнтовані ці бази.

1.6.5. У правильному шестикутнику $ABCDEF$ знайдіть матрицю переходу від бази $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$ до бази $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{OF}$, де O — центр шестикутника та визначте чи однаково орієнтовані ці бази.

1.6.6. В правильному шестикутнику $ABCDEF$ знайдіть матрицю переходу від бази $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$ до бази $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BF}$ та визначте чи однаково орієнтовані ці бази.

1.6.7. У просторі задано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть матрицю переходу від бази $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CC_1}$ до бази $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{B_1C}$. Визначте чи ці бази однаково орієнтовані.

1.6.8. У просторі задано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть матрицю переходу від бази $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AA_1}$ до бази $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DA_1}$. Визначте чи ці бази однаково орієнтовані.

1.6.9. В просторі задано три промені $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, що не лежать в одній площині. Всередині кутів AOB, BOC, COA взято, відповідно, промені $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$ та $\overrightarrow{OF}$. З'ясуйте однакову чи протилежну орієнтацію мають трійки векторів $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$.

1.6.10.* У просторі задано дві впорядковані трійки векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ та $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$, в яких вектори з однаковими індексами утворюють гострий кут, а вектори з різними індексами — перпендикулярні. З'ясуйте чи однаково орієнтовані ці дві трійки векторів.

1.7. Векторний і мішаний добутки

Означення 1.7.1. *Векторним добутком* двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{p} = [\,\vec{a}, \vec{b}\,]$, який задовольняє такі умови:

1) $|\,\vec{p}\,| = |\,\vec{a}\,|\,|\,\vec{b}\,| \sin\angle(\vec{a}, \vec{b})$;
2) $\vec{p} \perp \vec{a}$ і $\vec{p} \perp \vec{b}$;
3) трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$ має праву орієнтацію.

Очевидно, що довжина векторного добутку двох векторів чисельно дорівнює площі паралелограма, який побудований на векторах-співмножниках відкладених від спільної точки.

Теорема 1.7.2. *Нехай вектори* $\vec{a} = (\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3)$ *і* $\vec{b} = (\beta_1; \beta_2; \beta_3)$ *задано своїми координатами в правій ортонормованій базі* $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. *Тоді*

$$[\,\vec{a}, \vec{b}\,] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \beta_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \vec{k}. \tag{1.9}$$

Якщо ж координати векторів задано в лівій ортонормованій базі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, *то*

$$[\,\vec{a}, \vec{b}\,] = - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \beta_1 \end{vmatrix} \vec{j} - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \vec{k}. \tag{1.10}$$

Приклад 1.22. Обчисліть площу трикутника $S_\triangle$, вершини якого $A(-1; 0; -1)$, $B(0; 2; -3)$, $C(4; 4; 1)$ задано в деякій прямокутній системі координат.

Розв'язання. Оскільки довжина векторного добутку $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$ чисельно дорівнює площі паралелограма, який побудовано на векторах $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$, то площу трикутника знаходимо так:

$$S_\triangle = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 5 & 4 & 2 \end{matrix}\right\| =$$

$$= \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \vec{k} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|12\vec{i} - 12\vec{j} - 6\vec{k}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{12^2 + (-12)^2 + (-6)^2} = 9.$$

Теорема 1.7.3. *Для будь-яких векторів* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *і довільного числа* $\lambda \in \mathbb{R}$ *виконуються такі рівності: 1)* $[\,\vec{a}, \vec{b}\,] = -[\,\vec{b}, \vec{a}\,]$; *2)* $[\,\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\,] = [\,\vec{a}, \vec{c}\,] + [\,\vec{b}, \vec{c}\,]$; *3)* $[\,\lambda\vec{a}, \vec{b}\,] = \lambda[\,\vec{a}, \vec{b}\,]$.

Твердження 1.7.4. *Векторний добуток двох векторів дорівнює нульовому вектору тоді і тільки тоді, коли ці два вектори є колінеарними.*

Задача 1.14. Нехай у деякій афінній системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$ задано координати векторів $\vec{a} = (\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3)$ і $\vec{b} = (\beta_1; \beta_2; \beta_3)$. Доведіть, що

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} [\vec{e}_2, \vec{e}_3] & [\vec{e}_3, \vec{e}_1] & [\vec{e}_1, \vec{e}_2] \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}. \tag{1.11}$$

Розв'язання. Розпишемо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ через розклади за базовими векторами

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3 \quad \text{і} \quad \vec{b} = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \beta_3\vec{e}_3.$$

Тоді

$$[\vec{a}, \vec{b}] = [\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3, \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \beta_3\vec{e}_3] =$$

$$= (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)[\vec{e}_1, \vec{e}_2] + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)[\vec{e}_1, \vec{e}_3] + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)[\vec{e}_2, \vec{e}_3] =$$

$$= \begin{vmatrix} [\vec{e}_2, \vec{e}_3] & [\vec{e}_3, \vec{e}_1] & [\vec{e}_1, \vec{e}_2] \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

Приклад 1.23. Про афінну систему координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$ відомо, що $|\vec{e}_1| = 3$, $|\vec{e}_2| = 2$, $\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \dfrac{\pi}{6}$. Обчисліть площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = (3; 2)$, $\vec{b} = (-1; 4)$ у цій системі координат.

Розв'язання. Згідно з задачею 1.14

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{0} & \vec{0} & [\vec{e}_1, \vec{e}_2] \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (12 + 2)[\vec{e}_1, \vec{e}_2].$$

Отже, площа паралелограма побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ буде дорівнювати:

$$S = |[\vec{a}, \vec{b}]| = 14|[\vec{e}_1, \vec{e}_2]| = 14 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 42.$$

Означення 1.7.5. *Мішаним добутком* трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається число $(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})$, що дорівнює скалярному добутку векторного добутку векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$, тобто

$$(\ \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\ ) = [\ \vec{a}, \vec{b}\ ] \cdot \vec{c}. \tag{1.12}$$

Твердження 1.7.6. *Мішаний добуток трьох векторів* $\vec{a} = (\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)$, $\vec{b} = (\beta_1;\beta_2;\beta_3)$ *і* $\vec{c} = (\gamma_1;\gamma_2;\gamma_3)$, *заданих своїми координатами в правій ортонормованій базі, дорівнює визначнику, складеному з координат цих векторів, тобто*

$$(\ \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\ ) = [\ \vec{a}, \vec{b}\ ] \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}. \tag{1.13}$$

Якщо ж координати векторів задано в лівій ортонормованій базі, то

$$(\ \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\ ) = [\ \vec{a}, \vec{b}\ ] \cdot \vec{c} = -\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}. \tag{1.14}$$

Задача 1.15. Нехай у деякій афінній системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$ задано координати векторів $\vec{a} = (\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)$, $\vec{b} = (\beta_1;\beta_2;\beta_3)$ і $\vec{c} = (\gamma_1;\gamma_2;\gamma_3)$. Доведіть, що

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3). \tag{1.15}$$

Розв'язання. Розпишемо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ через розклади за базовими векторами

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3, \quad \vec{b} = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \beta_3\vec{e}_3 \quad \text{і} \quad \vec{c} = \gamma_1\vec{e}_1 + \gamma_2\vec{e}_2 + \gamma_3\vec{e}_3.$$

Тоді

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3, \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \beta_3\vec{e}_3, \gamma_1\vec{e}_1 + \gamma_2\vec{e}_2 + \gamma_3\vec{e}_3) =$$
$$= (\alpha_1\beta_2\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 - \alpha_3\beta_2\gamma_1)(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) =$$
$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3).$$

Задача 1.16. Нехай у деякій прямокутній системі координат задано вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ та $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$. Доведіть, що

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \cdot (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \begin{vmatrix} (\vec{x}, \vec{a}) & (\vec{x}, \vec{b}) & (\vec{x}, \vec{c}) \\ (\vec{y}, \vec{a}) & (\vec{y}, \vec{b}) & (\vec{y}, \vec{c}) \\ (\vec{z}, \vec{a}) & (\vec{z}, \vec{b}) & (\vec{z}, \vec{c}) \end{vmatrix}. \tag{1.16}$$

Розв'язання. Нехай у цій прямокутній системі координат вектори мають координати $\vec{a} = (\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)$, $\vec{b} = (\beta_1;\beta_2;\beta_3)$, $\vec{c} = (\gamma_1;\gamma_2;\gamma_3)$ та $\vec{x} = (x_1;x_2;x_3)$, $\vec{y} = (y_1;y_2;y_3)$, $\vec{z} = (z_1;z_2;z_3)$. Використавши Твердження 1.7.6 та властивість множення визначників, ми отримуємо, що

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \cdot (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} (\vec{x}, \vec{a}) & (\vec{x}, \vec{b}) & (\vec{x}, \vec{c}) \\ (\vec{y}, \vec{a}) & (\vec{y}, \vec{b}) & (\vec{y}, \vec{c}) \\ (\vec{z}, \vec{a}) & (\vec{z}, \vec{b}) & (\vec{z}, \vec{c}) \end{vmatrix}.$$

Задача 1.17. Нехай у деякій афінній системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$ задано координати векторів $\vec{a} = (\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)$, $\vec{b} = (\beta_1;\beta_2;\beta_3)$ і $\vec{c} = (\gamma_1;\gamma_2;\gamma_3)$. Доведіть, що

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot \sqrt{\begin{vmatrix} (\vec{e}_1, \vec{e}_1) & (\vec{e}_1, \vec{e}_2) & (\vec{e}_1, \vec{e}_3) \\ (\vec{e}_2, \vec{e}_1) & (\vec{e}_2, \vec{e}_2) & (\vec{e}_2, \vec{e}_3) \\ (\vec{e}_3, \vec{e}_1) & (\vec{e}_3, \vec{e}_2) & (\vec{e}_3, \vec{e}_3) \end{vmatrix}}. \tag{1.17}$$

Розв'язання. Якщо в задачі 1.16 розглянути дві однакові трійки векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, то отримуємо

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)^2 = \begin{vmatrix} (\vec{e}_1, \vec{e}_1) & (\vec{e}_1, \vec{e}_2) & (\vec{e}_1, \vec{e}_3) \\ (\vec{e}_2, \vec{e}_1) & (\vec{e}_2, \vec{e}_2) & (\vec{e}_2, \vec{e}_3) \\ (\vec{e}_3, \vec{e}_1) & (\vec{e}_3, \vec{e}_2) & (\vec{e}_3, \vec{e}_3) \end{vmatrix}. \tag{1.18}$$

Користуючись задачею 1.15 і рівністю 1.18, отримуємо твердження нашої задачі.

Нехай задано орієнтований векторний простір V_3, і впорядковану трійку некомпланарних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Побудуємо на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ як на сторонах паралелепіпед. Кожній впорядкованій трійці векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ставимо у відповідність число $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, яке називається *об'ємом орієнтованого паралелепіпеда* і це число дорівнює об'єму паралелепіпеда, яке беремо зі знаком плюс, якщо трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ права, дорівнює об'єму паралелепіпеда, яке беремо зі знаком мінус, якщо трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ліва та дорівнює нулю, якщо трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарна.

Теорема 1.7.7. *Мішаний добуток трьох векторів дорівнює об'єму орієнтованого паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.*

Твердження 1.7.8. *Мішаний добуток трьох векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці три вектори компланарні.*

Приклад 1.24. Про афінну систему координат $O_{\vec{e}_1, \vec{e}_2}$ відомо, що $|\vec{e}_1| = 3$, $|\vec{e}_2| = 1$, $|\vec{e}_3| = 2$, $\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \dfrac{\pi}{3}$, $\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = \dfrac{\pi}{2}$, $\angle(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = $ $= \dfrac{2\pi}{3}$. Обчисліть об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = (1; 2; 0)$, $\vec{b} = (-1; -1; 1)$, $\vec{c} = (0; 2; -1)$ у цій системі координат.

Розв'язання. Спочатку обчислимо всі скалярні добутки базових векторів

$$\begin{array}{ccc}
(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 9, & (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1,5, & (\vec{e}_1, \vec{e}_3) = 0, \\
(\vec{e}_2, \vec{e}_1) = 1,5, & (\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 1, & (\vec{e}_2, \vec{e}_3) = -1, \\
(\vec{e}_3, \vec{e}_1) = 0, & (\vec{e}_3, \vec{e}_2) = -1, & (\vec{e}_3, \vec{e}_3) = 4.
\end{array}$$

Згідно з задачею 1.17

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \sqrt{\begin{vmatrix} 9 & 1,5 & 0 \\ 1,5 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}} = -3 \cdot \sqrt{18} = -9\sqrt{2},$$

отже, $V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = 9\sqrt{2}$.

Приклад 1.25. Обчисліть об'єм паралелепіпеда $OADBCA'D'B'$, якщо задано довжини його ребер $|\overrightarrow{OA}| = a$, $|\overrightarrow{OB}| = b$, $|\overrightarrow{OC}| = c$ і кути $\angle BOC = \alpha$, $\angle COA = \beta$, $\angle AOB = \gamma$ між ними.

Розв'язання. В паралелепіпеді $OADBCA'D'B'$ виберемо систему координат $O_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3}$ (див. рис. 18) так, що $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$ і вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ співнапрямлені з векторами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, відповідно. Тоді вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$ матимуть у цій системі координат, відповідно, координати $(a; 0; 0)$, $(0; b; 0)$, $(0; 0; c)$.

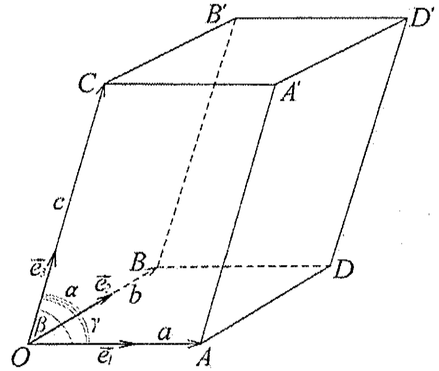


Рис. 18

Обчислимо усі скалярні добутки $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$, де $i, j = 1, 2, 3:$

$$\begin{array}{ccc}
\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1, & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1, & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1, \\
\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \cos\gamma, & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = \cos\beta, & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \cos\alpha.
\end{array}$$

Використавши формулу (1.17), отримуємо

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} \cdot \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}} =$$

$$= abc \cdot \sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma}.$$

Отож, об'єм паралелепіпеда $OADBCA'D'B'$ чисельно дорівнює

$$abc \cdot \sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma}.$$

Теорема 1.7.9. *Для будь-яких векторів* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ *і довільного числа* $\lambda \in \mathbb{R}$ *виконуються такі рівності:*

1) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b}) = -(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) = -(\vec{c},\vec{b},\vec{a}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$;

2) $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c},\vec{d}) = (\vec{a},\vec{c},\vec{d}) + (\vec{b},\vec{c},\vec{d})$;

3) $(\lambda\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \lambda(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$;

4) $[\vec{a},\vec{b}]\cdot\vec{c} = [\vec{b},\vec{c}]\cdot\vec{a} = [\vec{c},\vec{a}]\cdot\vec{b}$.

Приклад 1.26. Задано координати точок $A(-1;1;0)$, $B(2;3;1)$, $C(3;0;-2)$ у правій ортонормованій базі. Якщо $\vec{a} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{BC}$, то визначте:

а) векторний добуток $[\vec{a},\vec{b}]$;

б) мішаний добуток векторів $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$;

в) чи компланарні вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{d}$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо вектори

$\vec{c} = \overrightarrow{AB} = (3;2;1)$, $\quad \vec{b} = \overrightarrow{AC} = (4;-1;-2)$,

$\vec{d} = \overrightarrow{BC} = (1;-3;-3)$, $\quad \vec{a} = 2(3;2;1) - (1;-3;-3) = (5;7;5)$.

Отже,

$$\text{а) } [\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 7 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + 30\vec{j} - 33\vec{k} = (-9;30;-33);$$

$$\text{б) } (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

в) позаяк ці вектори належать площині трикутника ABC, то вони компланарні.

Приклад 1.27. Знайдіть довжину висоти AH трикутної піраміди $ABCD$, якщо задано координати її вершин у деякій прямокутній системі координат $A(2;-4;5)$, $B(-1;-3;4)$, $C(5;5;-1)$, $D(1;-2;2)$.

Розв'язання. Об'єм трикутної піраміди $ABCD$ дорівнює $\frac{1}{6}$ об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$, тобто

$$V_{\text{трик. піраміди}} = \frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{matrix} -3 & 1 & -1 \\ 3 & 9 & -6 \\ -1 & 2 & -3 \end{matrix}\right\| = \frac{15}{2}.$$

З іншого боку, $V_{\text{трик. піраміди}} = \frac{1}{3}\cdot S_{\triangle BCD}\cdot h$, де

$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}]| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} 8 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^2} = \frac{15}{2}.$$

$$\text{Отже, } AH = h = \frac{3\cdot V_{\text{трик. піраміди}}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{3\cdot\frac{15}{2}}{\frac{15}{2}} = 3.$$

Вправи

1.7.1. Знайдіть векторний добуток векторів $\vec{a} = (6;-1;0)$ і $\vec{b} = (2;2;3)$, якщо ці вектори задано в правій ортонормованій базі.

1.7.2. Знайдіть векторний добуток векторів $\vec{a} = (1;2;3)$ і $\vec{b} = (0;-1;1)$, якщо ці вектори задано в правій ортонормованій базі.

1.7.3. Обчисліть площу паралелограма $ABCD$, якщо відомо три послідовні вершини паралелограма $A(-1;0;-1)$, $B(0;2;-3)$, $C(4;4;1)$. Система координат прямокутна.

1.7.4. Обчисліть площу паралелограма $ABCD$, якщо відомо три послідовні вершини паралелограма $A(1;2;3)$, $B(9;6;4)$, $C(3;0;4)$. Система координат прямокутна.

1.7.5. Обчисліть площу трикутника, вершинами якого мають координати $A(1;-1;0)$, $B(3;2;1)$, $C(-2,-2;2)$. Система координат прямокутна.

1.7.6. Обчисліть площу трикутника, вершинами якого є точки $A(-1;0;3)$, $B(2;2;1)$, $C(3,-2;1)$. Система координат прямокутна.

1.7.7. Обчисліть $|[3\vec{a}-\vec{b},-\vec{a}+5\vec{b}]|$, якщо $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{5\pi}{6}$.

1.7.8. Обчисліть $|[\vec{a}-7\vec{b},2\vec{a}+\vec{b}]|$, якщо $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, \angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{6}$.

1.7.9. Обчисліть $|[5\vec{a}+4\vec{b},\vec{a}-6\vec{b}]|$, якщо $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 5, \angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.

1.7.10. Обчисліть $|[4\vec{a}+\vec{b},2\vec{a}-3\vec{b}]|$, якщо $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, \angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{3\pi}{4}$.

1.7.11. Про вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ відомо, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $|[5\vec{a}-\vec{b},\vec{b}-2\vec{a}]| = 18$. Обчисліть $(\vec{a},\vec{b})$.

1.7.12. Про вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ відомо, що $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $|[3\vec{a}+\vec{b},2\vec{a}-4\vec{b}]| = 28\sqrt{2}$. Обчисліть $(\vec{a},\vec{b})$.

1.7.13. За якого значення параметра α вектори $\alpha\vec{a}+5\vec{b}$ і $3\vec{a}-\vec{b}$ будуть колінеарними, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні?

1.7.14. За якого значення параметра α вектори $\alpha\vec{a} + 2\vec{b}$ і $3\vec{a} + 4\vec{b}$ будуть колінеарними, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні?

1.7.15. Перевірте, які рівності виконуються для довільних двох ненульових неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

а) $([\vec{a},\vec{b}],\vec{a}) = |\vec{a}|^2|\vec{b}|$; б) $([\vec{a},\vec{b}],[\vec{a},\vec{b}]) = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$;

в) $[\vec{a}-\vec{b},\vec{a}+\vec{b}] = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$; г) $[\vec{a}-\vec{b},\vec{a}-\vec{b}] = |\vec{a}|^2 - 2[\vec{a},\vec{b}] + |\vec{b}|^2$;

ґ) $[\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}] = \vec{0}$.

1.7.16. Нехай $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — права ортонормована база простору. Обчисліть:

а) $[\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}, 2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}]$;

б) $[2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}, \vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}]$;

в) $[\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}, 2\vec{i}-\vec{j}] + [\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}, 2\vec{i}-\vec{k}]$;

г) $[4\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}, \vec{i}+\vec{k}] + [2\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}, 2\vec{j}-3\vec{k}]$;

ґ) $([\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}, 2\vec{i}-\vec{j}], \vec{i}+\vec{j}) + ([\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}, 2\vec{i}-\vec{k}], \vec{k})$;

д) $([\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}, 2\vec{i}-\vec{j}], \vec{i}+\vec{k}) + ([\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}, 2\vec{i}-\vec{k}], \vec{i}+2\vec{j})$.

1.7.17. Обчисліть синус кута між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{m} = 2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ і $\vec{n} = \vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$, де $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ взаємно перпендикулярні вектори одиничної довжини.

1.7.18. Знайдіть ортогональну проекцію вектора $\vec{a} = (3;-12;4)$ на пряму, яка є паралельною до вектора $\vec{b} = [\vec{i}-2\vec{k}, \vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}]$, де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — права ортонормована база простору.

1.7.19. Визначте, в якій послідовності точки $M(1;-2;3)$, $N(3;-1;2)$, $K(0;1;-1)$ та $L(2;2;-2)$ утворюють плоский паралелограм. Обчисліть площу цього паралелограма. Система координат прямокутна.

1.7.20. Визначте, в якій послідовності точки $P(-2;1;-1)$, $R(1;-2;3)$, $S(1;3;0)$ та $T(4;0;4)$ утворюють плоский паралелограм. Обчисліть площу цього паралелограма. Система координат прямокутна.

1.7.21. Перевірте чи компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

а) $\vec{a} = (1;-2;1)$, $\vec{b} = (3;1;-2)$, $\vec{c} = (7;14;-13)$;

б) $\vec{a} = (3;1;0)$, $\vec{b} = (2;1;-1)$, $\vec{c} = (4;-2;1)$;

в) $\vec{a} = 3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i}+6\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$;

г) $\vec{a} = 2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{j}+7\vec{k}$.

1.7.22. За якого значення параметра α вектори $\vec{a} = (1;2;3)$, $\vec{b} = (3;0;-1)$ і $\vec{c} = (2;\alpha;1)$ будуть компланарними?

1.7.23. За якого значення параметра α вектори $\vec{a} = (5;2;4)$, $\vec{b} = (0;1;3)$ і $\vec{c} = (-1;3;\alpha)$ будуть компланарними?

1.7.24. Перевірте чи точки A, B, C та D належать одній площині:

а) $A(0;1;6)$, $B(2;-3;4)$, $C(3;-4;4)$, $D(-1;-3;1)$;

б) $A(1;2;6)$, $B(2;0;2)$, $C(4;8;1)$, $D(1;2;1)$;

в) $A(1;2;8)$, $B(-1;-1;0)$, $C(-1;0;1)$, $D(-1;-1;0)$;

г) $A(1;2;3)$, $B(-3;0;3)$, $C(5;1;1)$, $D(1;1;1)$.

1.7.25. Обчисліть об'єм паралелепіпеда $OABCO'A'B'C'$, в якому задано три вершини нижньої основи $O(0;0;0)$, $A(2;-3;0)$ і $C(3;2;0)$ і вершина верхньої основи $B'(3;0;4)$. Система координат прямокутна.

1.7.26. Обчисліть об'єм паралелепіпеда $ABCDA'B'C'D'$, якщо відомо його вершину $A(1;2;3)$ і кінці ребер, які з неї виходять $B(9;6;4)$, $C(3;0;4)$ та $A'(5;2;6)$. Система координат прямокутна.

1.7.27. Обчисліть об'єм орієнтованого паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, якщо $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — права ортонормована база простору.

1.7.28. Обчисліть об'єм орієнтованого паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{i}+\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i}-\vec{j}$, якщо $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — права ортонормована база простору.

1.7.29. Знайдіть об'єм трикутної піраміди $OABC$, вершини якої мають координати $O(0;0;0)$, $A(1;-1;0)$, $B(3;2;1)$, $C(-2,-2;2)$. Система координат прямокутна.

1.7.30. Знайдіть об'єм трикутної піраміди $OABC$, вершини якої мають координати $O(0;0;0)$, $A(-1;0;3)$, $B(2;2;1)$, $C(3,-2;1)$. Система координат прямокутна.

1.7.31. Обчисліть довжину висоти паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = 3\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, якщо за основу взято паралелограм, побудований на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

1.7.32. Обчисліть довжину висоти паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$, якщо за основу взято паралелограм, побудований на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

1.7.33. Знайдіть довжину висоти трикутної піраміди $SABC$, опущеної з вершини S на основу ABC, якщо відомо координати вершин $S(-1;0;3)$, $A(2;2;1)$, $B(3;-2;1)$, $C(0;0;0)$. Система координат прямокутна.

1.7.34. Знайдіть довжину висоти трикутної піраміди $SABC$, опущеної з вершини S на основу ABC, якщо відомі координати вершин

$S(5;2;6)$, $A(9;6;4)$, $B(3;0;4)$, $C(1;2;3)$. Система координат прямокутна.

1.7.35. Доведіть, що точки $A(1;2;4)$, $B(0;1;5)$, $C(2;1;1)$ та $D(-1;-3;3)$ утворюють плоский чотирикутник. Обчисліть його площу. Система координат прямокутна.

1.7.36. Доведіть, що точки $P(1;2;4)$, $R(-5;4;0)$, $S(1;-6;2)$ та $T(2;-5;3)$ утворюють плоский чотирикутник. Обчисліть його площу. Система координат прямокутна.

1.7.37. Задано два вектори $\vec{a} = (0;1;1)$ і $\vec{b} = (1;1;0)$ в правій ортонормованій базі. Знайдіть вектор $\vec{c}$ одиничної довжини, який перпендикулярний до вектора $\vec{a}$, утворює з вектором $\vec{b}$ кут $\frac{\pi}{4}$ і напрямлений так, що впорядкована трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ має додатну орієнтацію.

1.7.38. Задано два вектори $\vec{a} = (1;1;1)$ і $\vec{b} = (1;0;0)$ в правій ортонормованій базі. Знайдіть вектор $\vec{c}$ одиничної довжини, який перпендикулярний до вектора $\vec{a}$, утворює з вектором $\vec{b}$ кут $\frac{\pi}{3}$ і напрямлений так, що впорядкована трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ має праву орієнтацію.

1.7.39. Задано два вектори $\vec{a} = (2;1;1)$ і $\vec{b} = (1;1;2)$ в правій ортонормованій базі. Знайдіть вектор $\vec{c}$ одиничної довжини, який перпендикулярний до вектора $\vec{a}$, утворює з вектором $\vec{b}$ кут $\frac{2\pi}{3}$ і напрямлений так, що впорядкована трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ має ліву орієнтацію.

1.7.40. Відомо, що площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 5. Обчисліть площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} - \vec{b}$ і $2\vec{a} + 4\vec{b}$.

1.7.41. Відомо, що площа паралелограма, побудованого на векторах $5\vec{a} + 4\vec{b}$ і $3\vec{a} - 8\vec{b}$ дорівнює 25. Обчисліть площу паралелограма, побудованого на векторах $2\vec{a} + 3\vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$.

1.7.42. Відомо, що об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, дорівнює 5. Обчисліть об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} - \vec{b} - 4\vec{c}$, $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

1.7.43. Відомо, що об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$, дорівнює 5. Обчисліть об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

1.7.44. Довжини базових векторів афінної системи координат пов'язані співвідношеннями $|\vec{e}_1| = 2$, $|\vec{e}_2| = \sqrt{3}$, $\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \frac{5\pi}{6}$:

а) стосовно цієї системи координат задано вектори $\vec{a} = (1;2)$, $\vec{b} = (2;2)$. Знайдіть кут між цими векторами;

б) обчисліть площу трикутника ABC, де вершини мають координати $A(1;1)$, $B(2;2)$ і $C(1;2)$ у заданій системі координат.

1.7.45. Довжини базових векторів $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$, а кут між ними дорівнює $\frac{\pi}{3}$. Знайдіть:

а) довжину вектора $\vec{a} = (5;7)$;

б) площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = (1;4)$, $\vec{b} = (5;3)$.

1.7.46. Задано базові вектори афінної системи координат $|\vec{e}_1| = 4$, $|\vec{e}_2| = 2$, і кут між ними $\frac{\pi}{3}$. Стосовно цієї системи координат задано вершини паралелограма $ABCD$: $A(1;1)$, $B(2;1)$, $D(3;3)$. Обчисліть:

а) довжини діагоналей цього паралелограма;

б) довжину висоти, опущеної з вершини A на сторону BC;

в) площу паралелограма.

1.7.47. В базі $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ відомо, що $|\vec{e}_1| = 1$, $|\vec{e}_2| = 2$, $|\vec{e}_3| = 4$, $\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \frac{\pi}{3}$, $\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = \frac{\pi}{2}$, $\angle(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = \frac{\pi}{2}$. В цій базі задано вектори $\vec{a} = (0;1;2)$, $\vec{b} = (1;0;2)$, $\vec{c} = (0;0;1)$. Обчисліть об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

1.7.48. В базі $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ відомо, що $|\vec{e}_1| = 2$, $|\vec{e}_2| = 3$, $|\vec{e}_3| = 4$, $\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \frac{\pi}{3}$, $\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = \frac{\pi}{2}$, $\angle(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = \frac{2\pi}{3}$. В цій базі задано вектори $\vec{a} = (1;1;2)$, $\vec{b} = (1;-1;2)$, $\vec{c} = (0;2;1)$. Обчисліть об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

1.7.49. Три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ пов'язані співвідношеннями $\vec{a} = [\vec{b}, \vec{c}]$, $\vec{b} = [\vec{c}, \vec{a}]$, $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$. Знайдіть довжини векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і кути між ними.

1.7.50.* Доведіть таке: якщо три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ неколінеарні, то з рівності $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}]$ випливає співвідношення $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ і навпаки.

1.7.51.* Доведіть таке: якщо $[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}] + [\vec{c}, \vec{a}] = \vec{0}$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні.

1.7.52.* Доведіть таке: якщо три вектори $[\vec{a}, \vec{b}]$, $[\vec{b}, \vec{c}]$, $[\vec{c}, \vec{a}]$ компланарні, то вони колінеарні.

1.7.53.* Опишіть множину розв'язків рівняння $[\vec{a}, \vec{x}] = \vec{c}$, де $\vec{a}, \vec{c}$ — фіксовані вектори в просторі. Чи таке рівняння завжди має розв'язок?

1.7.54.* Доведіть, що для довільних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ виконуються рівності:

а) $\left[[\vec{a},\vec{b}],\vec{c}\right] = -\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}) + \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})$; б) $\left[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]\right] = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

1.7.55.* Трьома прямолінійними дорогами з постійною швидкістю рухаються три автомобілі. В початковий момент часу вони не перебували на одній прямій. Доведіть, що автомобілі можуть бути на одній прямій не більше двох разів.

1.7.56.* Доведіть, що неможливо неперервним поворотом векторів перетворити праву трійку векторів в ліву, не переходячи через положення компланарності.

Відповіді до розділу 1

1.1.1. $\vec{p} = 4\vec{e}_1 + \vec{e}_2$. **1.1.2.** $\vec{p} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$. **1.1.3.** $\vec{p} = -\frac{1}{2}\vec{q} + \frac{5}{2}\vec{r}$, якщо вектори $\vec{a},\vec{b}$ лінійно незалежні і $\vec{p} = x\vec{q} + y\vec{r}$, де $(2-x-y) + \lambda(-3-x-y) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, якщо вектори $\vec{a},\vec{b}$ лінійно залежні. **1.1.4.** $\vec{p} = -\frac{5}{3}\vec{q} + \frac{4}{3}\vec{r}$, якщо вектори $\vec{a},\vec{b}$ лінійно незалежні і $\vec{p} = x\vec{q} + y\vec{r}$, де $(1-x-2y) + \lambda(3+x-y) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, якщо вектори $\vec{a},\vec{b}$ лінійно залежні. **1.1.5.** а) $\overrightarrow{AB} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AM}$; б) $\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AM}$. **1.1.6.** а) $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. **1.1.7.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO}$; $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}$; $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}$; $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO}$; $\overrightarrow{CA} = -2\overrightarrow{AO}$. **1.1.8.** $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; $-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; $-\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$. **1.1.9.** $\overrightarrow{AC} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$; $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{CP} = -\frac{3}{2}\vec{a} - 2\vec{b}$. **1.1.10.** $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{NA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. **1.1.11.** $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AN} + \frac{4}{3}\overrightarrow{BM}$; $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AN} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$; $\overrightarrow{CN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AN} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$; $\overrightarrow{CA} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AN} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$; $\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AN} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$. **1.1.12.** $\overrightarrow{OA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{OE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{10}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{AB} - \frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$. **1.1.13.** $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. **1.1.14.** $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{5}\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{CD} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{DA} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{5}\overrightarrow{BD}$. **1.1.15.** $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{OP} = -\frac{2}{7}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{14}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{PB} = \frac{9}{7}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{7}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{CP} = -\frac{2}{7}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{7}\overrightarrow{AC}$. **1.1.16.** $\overrightarrow{CM} = -\frac{5}{8}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{8}\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{ML} = \frac{15}{56}\overrightarrow{AC} - \frac{57}{56}\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{LB} = -\frac{1}{7}\overrightarrow{AC} - \frac{8}{7}\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{LD} = \frac{1}{7}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{7}\overrightarrow{BD}$. **1.1.17.** $\overrightarrow{CM} = -\frac{7}{8}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{8}\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{ML} = \frac{29}{56}\overrightarrow{AC} + \frac{43}{56}\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{LB} = -\frac{1}{7}\overrightarrow{AC} - \frac{8}{7}\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{LD} = -\frac{1}{7}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{7}\overrightarrow{BD}$. **1.1.18.** $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BH} = \frac{43}{72}\overrightarrow{BA} + \frac{29}{72}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BL} = \frac{4}{7}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{7}\overrightarrow{BC}$. **1.1.19.** а) $\overrightarrow{BO} = -\frac{7}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} - \frac{5}{7}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{DA} = -\frac{2}{7}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{7}\overrightarrow{BC}$. б) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BO} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \frac{7}{9}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{CD} = \frac{2}{7}\overrightarrow{BO} - \frac{7}{9}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{DA} = -\frac{2}{7}\overrightarrow{BO} - \frac{2}{9}\overrightarrow{AC}$. **1.1.20.** $\overrightarrow{BL} = -\overrightarrow{AB} - \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{LC} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{NC} = -\frac{5}{7}\overrightarrow{AB} - \frac{31}{35}\overrightarrow{CA}$. **1.1.21.**

$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}$; $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}$; $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}$; $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF}$; $\overrightarrow{DF} = -2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF}$; $\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF}$; $\overrightarrow{CF} = -2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AF}$; $\overrightarrow{DA} = -2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AF}$. **1.1.22.** $\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BF} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BF} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BF} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BF} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{FA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BF} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$. **1.1.23.** $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{EF} = -3\overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{ME} = 2\overrightarrow{MA} + 8\overrightarrow{MC}$. **1.1.24.** $\overrightarrow{CM} = \frac{3}{20}\overrightarrow{CA} + \frac{3}{20}\overrightarrow{CB} + \frac{7}{10}\overrightarrow{CD}$. **1.1.25.** $\frac{1}{3}$. **1.1.26.** а) Лінійно незалежні; б) лінійно залежні; в) лінійно залежні; г) лінійно незалежні. **1.1.27.** $\vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$. **1.1.28.** $\overrightarrow{AB} = (1;-1)$; $\overrightarrow{BC} = (-\frac{5}{3};0)$; $\overrightarrow{CA} = (\frac{2}{3};1)$; $\overrightarrow{KC} = (-\frac{2}{3};0)$. **1.1.29.** $\overrightarrow{AB} = (\frac{6}{5};-\frac{14}{15})$; $\overrightarrow{BC} = (-\frac{6}{5};-\frac{2}{5})$; $\overrightarrow{CA} = (0;\frac{4}{3})$; $\overrightarrow{KC} = (0;-\frac{1}{3})$; $\overrightarrow{MA} = (-1;1)$. **1.1.30.** $\overrightarrow{AB} = (1;-1)$; $\overrightarrow{AM} = (\frac{5}{6};\frac{1}{6})$; $\overrightarrow{AN} = (\frac{1}{2};\frac{1}{2})$; $\overrightarrow{ND} = (-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$; $\overrightarrow{BD} = (-1;2)$. **1.1.31.** $\overrightarrow{DC} = (0;1)$; $\overrightarrow{CM} = (-\frac{2}{3};-\frac{5}{3})$; $\overrightarrow{BN} = (\frac{5}{9};-\frac{4}{9})$; $\overrightarrow{NA} = (-\frac{5}{9};-\frac{5}{9})$; $\overrightarrow{AC} = (1;2)$. **1.1.32.** $\overrightarrow{AB} = (-\frac{1}{4};0)$; $\overrightarrow{BC} = (-\frac{3}{4};\frac{3}{4})$; $\overrightarrow{CD} = (0;\frac{1}{4})$; $\overrightarrow{DA} = (1;-1)$; $\overrightarrow{OS} = (-\frac{3}{7};-\frac{3}{7})$; $\overrightarrow{OD} = (-\frac{3}{7};\frac{4}{7})$. **1.1.33.** $\overrightarrow{AB} = (\frac{1}{3};\frac{2}{3})$; $\overrightarrow{BC} = (-1;1)$; $\overrightarrow{CD} = (-\frac{5}{3};\frac{2}{3})$; $\overrightarrow{DA} = (\frac{7}{3};-\frac{7}{3})$; $\overrightarrow{HD} = (-\frac{5}{3};\frac{5}{3})$; $\overrightarrow{BD} = (-\frac{8}{3};\frac{5}{3})$. **1.1.34.** $\overrightarrow{BC} = (0;\frac{1}{2})$; $\overrightarrow{CD} = (-1;\frac{1}{2})$; $\overrightarrow{CF} = (-2;0)$; $\overrightarrow{DE} = (-1;0)$; $\overrightarrow{EA} = (1;-1)$; $\overrightarrow{CE} = (-2;\frac{1}{2})$. **1.1.35.** $\overrightarrow{AB} = (1;0)$; $\overrightarrow{BC} = (\sqrt{2};1)$; $\overrightarrow{CD} = (1;\sqrt{2})$; $\overrightarrow{DE} = (0;1)$; $\overrightarrow{EF} = (-1;0)$; $\overrightarrow{FG} = (-\sqrt{2};-1)$; $\overrightarrow{GH} = (-1;-\sqrt{2})$; $\overrightarrow{FA} = (-1-\sqrt{2};-2-\sqrt{2})$. **1.1.36.** $\overrightarrow{AC} = (2;1;0)$; $\overrightarrow{CD} = (-1;0;0)$; $\overrightarrow{D_1B_1} = (0;-1;0)$; $\overrightarrow{A_1B} = (1;0;1)$; $\overrightarrow{D_1B} = (0;-1;1)$. **1.1.37.** $\overrightarrow{AB} = (0;-1;0)$; $\overrightarrow{CA} = (-1;1;0)$; $\overrightarrow{BD} = (1;1;0)$; $\overrightarrow{BC} = (1;0;0)$; $\overrightarrow{AC_1} = (1;-1;-1)$; $\overrightarrow{DC_1} = (0;-1;-1)$. **1.1.38.** $\overrightarrow{AB} = (-1;1;0)$; $\overrightarrow{BC} = (0;-1;1)$; $\overrightarrow{AC} = (-1;0;1)$; $\overrightarrow{KL} = (-\frac{1}{2};\frac{1}{2};0)$; $\overrightarrow{PQ} = (-\frac{1}{2};\frac{1}{2};0)$; $\overrightarrow{NC} = (-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};1)$; $\overrightarrow{MP} = (\frac{1}{2};0;0)$; $\overrightarrow{KQ} = (-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2})$. **1.1.39.** $\overrightarrow{OK} = (\frac{1}{4};0;0)$; $\overrightarrow{KL} = (-\frac{1}{4};\frac{2}{3};0)$; $\overrightarrow{KM} = (-\frac{1}{4};0;\frac{1}{5})$; $\overrightarrow{KB} = (-\frac{1}{4};1;0)$; $\overrightarrow{MC} = (0;0;\frac{4}{5})$; $\overrightarrow{AL} = (1;\frac{2}{3};0)$. **1.1.40.** O — точка перетину прямих, які з'єднують середини протилежних сторін чотирикутника $ABCD$. **1.1.41.** O — точка перетину семи прямих: три прямі проходять через середини протилежних ребер трикутної піраміди, а чотири прямі проходять через вершини піраміди і точки перетину медіан протилежних до цих вершин граней.

1.2.1. $A(0;0)$; $B(1;0)$; $C(0;1)$; $O(\frac{1}{3};\frac{1}{3})$; $F(\frac{2}{5};\frac{3}{5})$. **1.2.2.** $A(0;0)$; $B(1;0)$; $C(1;1)$; $O(\frac{2}{3};\frac{1}{3})$. **1.2.3.** $A(0;1)$; $B(1;1)$; $C(0;0)$; $O(\frac{1}{3};\frac{2}{3})$. **1.2.4.** $A(1;0)$; $B(0;1)$; $C(-1;-1)$; $O(0;0)$. **1.2.5.** $O(0;0)$; $M(1;0)$; $N(0;1)$; $A(-2;0)$; $B(0;-2)$; $C(2;2)$. **1.2.6.** $A(1;0)$; $B(0;-1)$; $C(-1;0)$; $D(0;1)$. **1.2.7.** а) $O(2;3)$; б) $M(3;2)$; в) $N(0;-7)$. **1.2.8.** $S(0;0)$; $B(1;0)$; $C(0;1)$; $D(-\frac{3}{4};\frac{3}{4})$; $A(\frac{1}{4};-\frac{1}{4})$. **1.2.9.** $W(0;0)$; $A(4;0)$; $B(1;0)$; $C(-3;1)$; $D(0;1)$. **1.2.10.**

$A(-1;0)$; $B(0;0)$; $C(0;\frac{1}{4})$; $D(-1;1)$; $M(-\frac{1}{5};\frac{1}{5})$. **1.2.11.** $A(0;0)$; $B(1;1)$; $C(0;1)$; $D(-\frac{3}{2};0)$; $M(0;\frac{3}{5})$. **1.2.12.** $A(-1;0)$; $B(0;1)$; $C(1;1)$; $D(2;0)$; $M(0;0)$. **1.2.13.** $A(2;0)$; $B(1;0)$; $C(-1;\frac{3}{2})$; $D(-2;3)$; $O(0;1)$; $S(0;0)$. **1.2.14.** $A(1;0)$; $B(0;0)$; $C(-1;\frac{1}{2})$; $D(-1;1)$; $E(0;1)$; $F(1;\frac{1}{2})$. **1.2.15.** $A(-\frac{1}{2};1)$; $B(0;1)$; $C(1;0)$; $D(\frac{3}{2};-1)$; $E(1;-1)$; $F(0;0)$. **1.2.16.** $A(1;0)$; $B(0;1)$; $C(-\frac{4}{7};\frac{4}{7})$; $D(-\frac{1}{7};-\frac{6}{7})$; $E(\frac{6}{7};-\frac{13}{7})$; $F(\frac{10}{7};-\frac{10}{7})$. **1.2.17.** $A(0;0)$; $B(\frac{4}{5};\frac{1}{5})$; $C(-\frac{1}{5};\frac{6}{5})$; $D(-1;1)$; $H(-\frac{1}{5};\frac{1}{5})$. **1.2.18.** $A(1;0)$; $B(-\frac{4}{3};0)$; $C(0;1)$; $L(0;0)$. **1.2.19.** $A(\frac{25}{18};1)$; $B(0;0)$; $C(\frac{25}{9};0)$; $H(0;1)$; $M(\frac{25}{18};0)$. **1.2.20.** $\frac{1}{5}$. **1.2.21.** $A(-1;-1)$; $B(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2})$; $C(\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$; $D(0;0)$; $O(-\frac{1}{4};-\frac{3}{4})$. **1.2.22.** $A(0;1;-1)$; $B(1;2;-1)$; $C(1;1;-1)$; $D(0;0;-1)$; $A_1(0;1;0)$; $B_1(1;2;0)$; $C_1(1;1;0)$; $D_1(0;0;0)$; $O(\frac{1}{2};\frac{3}{2};-\frac{1}{2})$. **1.2.23.** $A(-1;1;0)$; $B(0;1;0)$; $C(0;0;0)$; $D(-1;0;0)$; $A_1(-1;1;1)$; $B_1(0;1;1)$; $C_1(0;0;1)$; $D_1(-1;0;1)$; $O(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2})$. **1.2.24.** а) $K(4;2)$; б) $M(3;2)$; в) $N\left(\frac{5}{2};2\right)$; г) $\left(\frac{19}{5};\frac{13}{5}\right)$. **1.2.25.** а) $M(12;4;4)$; б) $N(9;3;3)$; в) $Z\,(9;3;3)$.

1.3.1. $M(1;4)$. **1.3.2.** $M(13;16)$. **1.3.3.** На відстані 26 см від центра кулі масою 100 г. **1.3.4.** $M(5{,}5;4{,}75)$. **1.3.5.** $M(1;2{,}5)$. **1.3.6.** $M(1;-1)$. **1.3.7.** $M\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$. **1.3.8.** $M(3;3)$. **1.3.9.** $M(8{,}2;6{,}2)$. *Вказівка:* Використовуючи формули, отримані у вправі 1.3.7., знайдіть центри ваг трикутників ABC і ADC та поділіть відстань між ними у відношенні, оберненому до відношення площ цих трикутників. **1.3.10.** $\left(\frac{37}{27};\frac{13}{27}\right)$. **1.3.17.** $M_1(8;0)$, $M_2\left(-1;3\sqrt{3}\right)$. **1.3.11.** $(-a;-b)$. **1.3.12.** $\left(\frac{10}{3};\frac{17}{3}\right)$. **1.3.13.** $B_1(11;0)$, $C_1(8;11{,}5)$. **1.3.14.** $(11;7)$. **1.3.15.** $\left(\frac{31}{3};\frac{14}{3};\frac{2}{3}\right)$. **1.3.16.** Перетинаються в точці $\left(-\frac{3}{2};\frac{5}{2};11\right)$. **1.3.18.** $(0;5)$, $r=3\sqrt{5}$. **1.3.19.** *Вказівка:* Введіть радіус-вектори точок $A_1,\ldots,A_n$ та виразіть через них радіус-вектор точки M.

1.4.1. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. **1.4.2.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **1.4.3.** $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. **1.4.4.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$. **1.4.5.** $\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{20} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$. **1.4.6.** $\begin{pmatrix} \frac{6}{11} & \frac{5}{11} \\ -\frac{5}{11} & \frac{5}{11} \end{pmatrix}$. **1.4.7.** $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. **1.4.8.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$. **1.4.9.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. **1.4.10.** $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -1 \\ \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$. **1.4.11.** а) $\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$; б) $(0;2)$; в) $(4;-1)$. **1.4.12.** а) $\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$; б) $(\frac{12}{5};\frac{14}{5})$; в) $(6;1)$. **1.4.13.** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. **1.4.14.** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$. **1.4.15.** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$. **1.4.16.** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$. **1.4.17.** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. **1.4.18.** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. **1.4.19.** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$. **1.4.20.** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. **1.4.21.** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. **1.4.22.** а) $\begin{cases} x = 2x' + y' - 1 \\ y = 3x' + y' + 3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x' = -x + y - 4 \\ y' = 3x - 2y + 9 \end{cases}$; в) $O(-4;9)$. **1.4.23.** а) $\begin{cases} x = 4x' + 5y' + 3z' + 1 \\ y = 2x' + 3y' + 2z' + 1 \\ z = x' + 2y' + z' + 2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x' = x - y - z + 2 \\ y' = -y + 2z - 3 \\ z' = -x + 3y - 2z + 2 \end{cases}$; в) $O(2;-3;2)$. **1.4.24.** а) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; в) $(1;-1)$; г) $(0;\frac{1}{2})$; д) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. **1.4.25.** а) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; в) $(-\frac{1}{9};\frac{4}{3})$; г) $(3;-1)$; г) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$. **1.4.26.** а) $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; в) $19x' - 12y' + 7 = 0$. **1.4.27.** а) $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; в) $13x' - 3y' - 14z' - 9 = 0$. **1.4.28.** $\begin{cases} x' = \frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_1x_0+b_1y_0+c_1} \\ y' = \frac{a_2x+b_2y+c_2}{a_2x_0+b_2y_0+c_2} \end{cases}$

1.5.1. а) 3; б) 9; 4; в) 52; г) 1. **1.5.2.** а) −2; б) 16; 1; в) 97; г) 42. **1.5.3.** −1. **1.5.4.** −5. **1.5.5.** 19. **1.5.6.** $\vec{e} = \frac{6}{11}\vec{i} - \frac{7}{11}\vec{j} - \frac{6}{11}\vec{k}$. **1.5.7.** $\frac{\pi}{4}$. **1.5.8.** а) Так; б) ні; в) так; г) так; ґ) ні; д) ні; е) так. **1.5.9.** а) Ортогональні; б) однаково напрямлені; в) однаково напрямлені; г) протилежно напрямлені; ґ) протилежно напрямлені і $|\vec{a}| \geq |\vec{b}|$. **1.5.10.** Коло з центром O на прямій AB і радіусом $OA = AB$. **1.5.11.** $\frac{\pi}{3}$. **1.5.12.** Сума квадратів довжин діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів довжин сторін цього паралелограма. **1.5.13.** $-\frac{3}{2}$. **1.5.14.** 0. **1.5.16.** $\frac{1}{\sqrt{37}}$. **1.5.17.** $-\frac{15}{\sqrt{901}}$. **1.5.18.** −5. **1.5.19.** −4. **1.5.20.** $\frac{\pi}{3}$. **1.5.21.** 40. **1.5.22.** $\frac{\pi}{4}$. **1.5.23.** 5. **1.5.24.** 151. **1.5.25.**

73. **1.5.26.** 15; $\sqrt{593}$. **1.5.27.** 14. **1.5.28.** $\sqrt{17}$. **1.5.29.** $\left(\frac{15\sqrt{17}}{17}; \frac{25\sqrt{17}}{17}; 0\right)$; $\left(-\frac{15\sqrt{17}}{17}; -\frac{25\sqrt{17}}{17}; 0\right)$. **1.5.30.** $\left(-\frac{40\sqrt{2}}{\sqrt{41}}; 0; \frac{50\sqrt{2}}{\sqrt{41}}\right)$; $\left(\frac{40\sqrt{2}}{\sqrt{41}}; 0; -\frac{50\sqrt{2}}{\sqrt{41}}\right)$. **1.5.31.** $(6;6;-3)$. **1.5.32.** $(1;-1;2)$. **1.5.33.** $(6;6;0)$. **1.5.34.** $(6;4;-1)$. **1.5.35.** $(3;-1;1)$. **1.5.36.** а) 145; б) 0; в) $\sqrt{393}$; г) $\arccos\left(-\frac{19}{35}\right)$. **1.5.37.** а) 35; б) 126; в) $2\sqrt{61}$; г) $\arccos\left(\sqrt{\frac{11}{47}}\right)$. **1.5.38.** а) $(-1; -\frac{11}{32})$; б) $\begin{cases} x = x' - 1 \\ y = \frac{21}{32}x' - y' + \frac{11}{32} \end{cases}$; в) $\begin{cases} x = -\frac{8\sqrt{15}}{45}x' \\ y = \frac{11\sqrt{15}}{180}x' + \frac{1}{4}y' + \frac{11}{32} \end{cases}$. **1.5.39.** а) $(1; -\frac{1}{25})$; б) $\begin{cases} x = -\frac{25}{26}x' + \frac{25}{26} \\ y = \frac{25}{26}x' - y' + \frac{1}{26} \end{cases}$; в) $\begin{cases} x = -\frac{13\sqrt{14}}{140}x' - \frac{1}{5}y' + \frac{26}{25} \\ y = \frac{\sqrt{14}}{280}x' + \frac{1}{5}y' - \frac{1}{25} \end{cases}$. **1.5.40.** $\frac{\pi}{3}$. **1.5.41.** $\arccos\frac{4}{5}$. **1.5.42.** $2\sqrt{61}$. **1.5.43.** $\sqrt{469}$. **1.5.44.** π. **1.5.45.** π. **1.5.46.** $3\sqrt{19}$; $2\sqrt{7}$; $\arccos\left(-\frac{5\sqrt{133}}{133}\right)$. **1.5.47.** $\sqrt{111}$; $2\sqrt{21}$; $\arccos\left(\frac{48}{\sqrt{2331}}\right)$. **1.5.48.** $\frac{\pi}{3}$. **1.5.49.** 2; 1; $\frac{\pi}{3}$. **1.5.50.** $\frac{\sqrt{10}}{2}$; $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; $\arccos\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$. **1.5.51.** $\sqrt{15} + 3\sqrt{7}$; $\arccos\frac{3\sqrt{105}}{35}$; $\arccos\frac{3\sqrt{105}}{105}$. **1.5.52.** $3\sqrt{13} + \sqrt{103} + 1$; $\arccos\frac{73}{2\sqrt{1339}}$; $\arccos\frac{5}{2\sqrt{13}}$; $\arccos\left(-\frac{13}{2\sqrt{103}}\right)$. **1.5.56.** *Вказівка:* Введіть радіус-вектори точок A, B, C, D.

1.6.1. Протилежна. **1.6.2.** Однакова. **1.6.3.** Протилежна. **1.6.4.** Однакова. **1.6.5.** Однакова. **1.6.6.** Однакова. **1.6.7.** Протилежна. **1.6.8.** Протилежна. **1.6.9.** Однакова. **1.6.10.** Однакова.

1.7.1. $(-3;-18;14)$. **1.7.2.** $(5;-1;-1)$. **1.7.3.** 18. **1.7.4.** $18\sqrt{2}$. **1.7.5.** $\frac{7}{2}\sqrt{3}$. **1.7.6.** $\sqrt{66}$. **1.7.7.** 42. **1.7.8.** 90. **1.7.9.** $170\sqrt{2}$. **1.7.10.** $84\sqrt{2}$. **1.7.11.** $\pm6\sqrt{3}$. **1.7.12.** $\pm2\sqrt{2}$. **1.7.13.** -15. **1.7.14.** $\frac{3}{2}$. **1.7.15.** а) Ні; б) ні; в) ні; г) ні; ґ) так. **1.7.16.** а) $(2;-5;-3)$; б) $(-4;5;7)$; в) $(4;13;1)$; г) $(-19;4;7)$; ґ) 10; д) 15. **1.7.17.** $2\sqrt{\frac{62}{273}}$. **1.7.18.** $\left(\frac{36}{49}; \frac{12}{49}; \frac{18}{49}\right)$. **1.7.19.** Наприклад, $KMNL$; $S = \sqrt{131}$. **1.7.20.** Наприклад, $SPRT$; $S = \sqrt{427}$. **1.7.21.** а) Ні; б) ні; в) ні; г) так. **1.7.22.** $\alpha = 1$. **1.7.23.** $\alpha = 9,4$. **1.7.24.** а) Так; б) ні; в) так; г) ні. **1.7.25.** 52. **1.7.26.** 48. **1.7.27.** -4. **1.7.28.** -7. **1.7.29.** $\frac{7}{3}$. **1.7.30.** $\frac{17}{3}$. **1.7.31.** $\frac{49}{\sqrt{323}}$. **1.7.32.** $\frac{41}{\sqrt{227}}$. **1.7.33.** $\frac{34}{\sqrt{117}}$. **1.7.34.** $\frac{8}{3\sqrt{2}}$. **1.7.35.** $\frac{5\sqrt{6}}{2}$. **1.7.36.** $7\sqrt{26}$. **1.7.37.** $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$. **1.7.38.** $\left(\frac{1}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{4}; \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)$. **1.7.39.** $\left(\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{2}}{11}; \frac{-\sqrt{6}+6\sqrt{2}}{22}; \frac{-7\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{22}\right)$. **1.7.40.** 30. **1.7.41.** $\frac{125}{52}$. **1.7.42.** 50. **1.7.43.** 10. **1.7.44.** а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **1.7.45.** а) $\sqrt{109}$; б) $\frac{17\sqrt{3}}{2}$. **1.7.46.** а) $4\sqrt{13}; 4\sqrt{3}$; б) $\frac{2\sqrt{21}}{7}$; в) $8\sqrt{3}$. **1.7.47.** $4\sqrt{3}$. **1.7.48.** $24\sqrt{2}$. **1.7.49.** $1; 1; 1; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$.

Розділ 2
Пряма на площині

2.1. Рівняння прямої на площині

Пряма на площині однозначно задається точкою і ненульовим вектором, який належить цій прямій (або паралельний до неї). Цей вектор називають *напрямним вектором* прямої. Нехай у деякій афінній системі координат пряма l задається точкою $M_0(x_0; y_0)$ і напрямним вектором $\vec{p} = (\alpha; \beta)$. Розглянемо довільну точку $M(x; y) \in l$. Ця точка належить прямій l тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{p}$ колінеарні, тобто для кожної точки $M \in l$ існує таке $t \in \mathbb{R}$, що виконується рівність:

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{p}. \tag{2.1}$$

Рівняння (2.1) називається *векторно-параметричним* рівнянням прямої. Якщо перейти до координат, то отримуємо *параметричне* рівняння прямої на площині

$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta. \end{cases} \tag{2.2}$$

Виразивши з цих двох рівнянь параметр t, одержимо *канонічне* рівняння прямої на площині

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}. \tag{2.3}$$

Задача 2.1. Напишіть рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$.

Розв'язання. Вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ є напрямним вектором шуканої прямої і згідно з (2.3) рівняння прямої набуде вигляду

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Теорема 2.1.1. *Геометричне місце точок площини, задане в афінній системі координат рівнянням першого порядку*

$$ax + by + c = 0, \tag{2.4}$$

де $|a| + |b| \neq 0$ *є прямою з напрямним вектором* $\vec{p} = (-b; a)$.

Рівняння (2.4) називається *загальним* рівнянням прямої на площині. *Нормальним вектором* прямої називається довільний ненульовий вектор, який перпендикулярний до цієї прямої.

Твердження 2.1.2. *Якщо пряма* l *має рівняння* $ax + by + c = 0$ *в прямокутній системі координат, то вектор* $\vec{n} = (a; b)$ *є нормальним вектором прямої* l.

Задача 2.2. Нехай у деякій афінній системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$ задано вектор $\vec{n} = (a; b)$ і точку $M_0(x_0; y_0)$. Напишіть рівняння прямої, яка проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\vec{n}$.
Розв'язання. Нехай l шукана пряма. Точка $M(x; y) \in l$ тоді і тільки тоді, коли $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$, тобто $(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}) = 0$. Розписуючи цей скалярний добуток у цій афінній системі координат, одержимо

$$((x - x_0)\vec{e}_1 + (y - y_0)\vec{e}_2)(a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2) = 0,$$

або

$$a(x - x_0)|\vec{e}_1|^2 + (a(y - y_0) + b(x - x_0))\,\vec{e}_1\vec{e}_2 + b(y - y_0)|\vec{e}_2|^2 = 0. \tag{2.5}$$

Задача 2.3. Нехай у деякій прямокутній системі координат задано вектор $\vec{n} = (a; b)$ і точку $M_0(x_0; y_0)$. Напишіть рівняння прямої, яка проходить через точку M_0, перпендикулярно до вектора $\vec{n}$.
Розв'язання. Нехай l шукана пряма. Точка $M(x; y) \in l$ тоді і тільки тоді, коли $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$, тобто $(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}) = 0$. Розписуючи цей скалярний добуток у цій прямокутній системі координат, одержимо

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \tag{2.6}$$

Нехай $\vec{p} = (\alpha; \beta)$ напрямний вектор прямої l, яка не є паралельною до осі Oy. Тоді *кутовим коефіцієнтом* прямої називається число $k = \dfrac{\beta}{\alpha}$. Якщо система координат Oxy прямокутна, то кутовий коефіцієнт прямої дорівнює тангенсу кута між цією прямою і додатним напрямом осі Ox.

Означення 2.1.3. *Відстанню між множинами* $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ на площині називається число $d(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, яке дорівнює

$$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf\{|AB| \; : \; A \in \mathcal{A},\, B \in \mathcal{B}\}. \tag{2.7}$$

Задача 2.4. Доведіть, що в прямокутній системі координат відстань від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $l \, : \, ax + by + c = 0$ обчислюється за формулою

$$d(M_0, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{2.8}$$

Розв'язання. Нехай $M_1(x_1; y_1)$ — основа перпендикуляра, опущеного з точки M_0 на пряму l. Нормальний вектор $\vec{n}$ прямої l має координати $(a; b)$ і є колінеарним до вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$. За означенням скалярного добутку отримаємо

$$\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{n} = |\overrightarrow{M_1M_0}| \cdot |\vec{n}| \cos\angle(\overrightarrow{M_1M_0}, \vec{n}) = \pm|\overrightarrow{M_1M_0}| \cdot |\vec{n}|.$$

Отож,

$$d(M_0, l) = |\overrightarrow{M_1M_0}| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_0}|}{|\vec{n}|} = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} =$$

$$= \frac{|ax_0 + by_0 - ax_1 - by_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Оскільки точка M_1 належить прямій l, то $ax_1 + by_1 + c = 0$, а отже, $c = -ax_1 - by_1$ і тому

$$d(M_0, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Приклад 2.1. Задано вершини $A(2;1)$, $B(7;2)$, $C(5;4)$ трикутника ABC. Знайдіть:

а) рівняння сторони AB;

б) рівняння медіани BM;

в) рівняння висоти CK і її довжину;

г) точку перетину медіани BM і висоти CK;

ґ) рівняння прямої, яка проходить через точку A паралельно до сторони BC;

д) рівняння бісектриси кута C;

е) кутовий коефіцієнт прямої CK;

є) запишіть нормальне рівняння прямої CK та рівняння у відрізках на осях.

Система координат прямокутна.

Розв'язання. а) Рівняння сторони AB запишемо як рівняння прямої, що проходить через дві точки: $\dfrac{x-2}{7-2} = \dfrac{y-1}{2-1}$ (див. задачу 2.1) і відповідне загальне рівняння $x - 5y + 3 = 0$.

б) Оскільки точка M є серединою відрізка AC, то координати точки M — $(3,5;2,5)$, канонічне рівняння медіани BM набуде вигляду $\dfrac{x-7}{3,5-7} = \dfrac{y-2}{2,5-2}$ (див. задачу 2.1) і загальне рівняння $x + 7y - 21 = 0$.

в) Висота CK є прямою перпендикулярною до AB, а тому нормальний вектор $\vec{n}_{AB}$ прямої AB є напрямним вектором $\vec{p}_{CK}$ висоти CK і висота CK за формулою (2.3) має канонічне рівняння $\dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y-4}{-5}$ та загальне рівняння $5x + y - 29 = 0$.

Довжина висоти, опущеної з точки C на сторону AB — це відстань від точки C до прямої AB, тобто за формулою (2.8)

$$d(C, AB) = \frac{|5 - 5\cdot 4 + 3|}{\sqrt{1+25}} = \frac{12}{\sqrt{26}}.$$

г) Координати точки перетину медіани BM і висоти CK задовольняють систему рівнянь $\begin{cases} x + 7y - 21 = 0 \\ 5x + y - 29 = 0 \end{cases}$, розв'язавши яку, отримуємо $x = \dfrac{91}{17}$, $y = \dfrac{38}{17}$.

ґ) Пряма BC має напрямний вектор $\vec{p}_{BC} = \overrightarrow{BC}$; паралельна до BC пряма, що проходить через точку A матиме такий самий напрямний вектор, тому її канонічне рівняння таке:

$$\frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{2} \text{ або } x + y - 3 = 0.$$

д) Знайдемо напрямний вектор $\vec{p}_{CL}$ бісектриси CL кута C. Для цього побудуємо ромб зі стороною одиничної довжини і однією з вершин у точці C. Вектори

$$\frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \frac{\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

будуть сусідніми сторонами цього ромба і за правилом паралелограма додавання векторів $\vec{p}_{CL} = \dfrac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|} + \dfrac{\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|} = (0; -\sqrt{2})$ (бо діагональ ромба є бісектрисою кута, з якого вона виходить). Рівняння бісектриси CL набуває вигляду

$$\frac{x-5}{0} = \frac{y-4}{-\sqrt{2}} \text{ або } x - 5 = 0.$$

Зробимо три незалежні перетворення з рівнянням висоти CK.

е) Виразимо з цього рівняння змінну y, отримуємо $y = -5x + 29$, тому кутовий коефіцієнт цієї прямої дорівнює $k = -5$.

є) Поділимо це рівняння на довжину нормального вектора, одержимо рівняння $\dfrac{5}{\sqrt{26}}x + \dfrac{1}{\sqrt{26}}y - \dfrac{29}{\sqrt{26}} = 0$ — це нормальне рівняння прямої CK.

Перенесемо вільний член у праву сторону і поділимо все рівняння на 29, матимемо $\dfrac{x}{\frac{29}{5}} + \dfrac{y}{29} = 1$ — це рівняння прямої CK у відрізках.

Приклад 2.2. Знайдіть координати точки A', симетричної до точки $A(1;2)$ стосовно прямої $l:\ 3x + y + 1 = 0$. Система координат прямокутна.

Розв'язання. Опустимо перпендикуляр з точки A на пряму l. Цей перпендикуляр має рівняння

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} \quad \text{або} \quad x - 3y + 5 = 0.$$

Знайдемо основу цього перпендикуляра, тобто точку перетину перпендикуляра з заданою прямою l. Для цього розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} 3x+y+1=0 \\ x-3y+5=0 \end{cases}$. Отримуємо $x=-\frac{4}{5}$, $y=-\frac{7}{5}$, тобто основа перпендикуляра є точкою $H\left(-\frac{4}{5};-\frac{7}{5}\right)$. Позаяк точка $A'(x;y)$ симетрична до точки A стосовно прямої l, то точка H є серединою відрізка AA'. Звідси

$$-\frac{4}{5}=\frac{x+1}{2} \text{ і } \frac{7}{5}=\frac{y+2}{2} \text{ або } x=-\frac{13}{5},\ y=\frac{4}{5}.$$

Отже, шукана точка A' має координати $\left(-\frac{13}{5};\frac{4}{5}\right)$.

Приклад 2.3. Основа BC рівнобедреного трикутника ABC належить прямій $x+2y=0$, а бічна сторона AB — прямій $x-y+6=0$. Запишіть рівняння:

а) прямої, яка проходить через точку перетину заданих сторін паралельно до третьої сторони;

б) висоти, яка опущена з точки перетину заданих сторін на третю сторону трикутника;

в) медіани, яка проведена з точки перетину заданих прямих на третю сторону.

Система координат прямокутна.

Розв'язання. Розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} x+2y=0 \\ x-y+6=0 \end{cases}$, знайдемо координати $x=-4$, $y=2$ вершини B трикутника, яка є перетином сторін AB і BC.

Вектор $\vec{p_1}=(-2;1)$ є напрямним вектором прямої BC, вектор $\vec{p_2}=(1;1)$ є напрямним вектором прямої AB і нехай вектор $\vec{p_3}=(\alpha;\beta)$ є напрямним вектором прямої AC. Позаяк трикутник рівнобедрений, то

$$\frac{\vec{p_1}\cdot\vec{p_2}}{|\vec{p_1}|\cdot|\vec{p_2}|}=\pm\frac{\vec{p_1}\cdot\vec{p_3}}{|\vec{p_1}|\cdot|\vec{p_3}|}.$$

Звідси отримаємо $\frac{1}{\sqrt{10}}=\pm\frac{-2\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cdot\sqrt{5}}$. Зробимо деякі спро-

щення цього виразу

$$\begin{gathered}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\pm\sqrt{2}(-2\alpha+\beta),\\ \alpha^2+\beta^2=2(-2\alpha+\beta)^2,\\ \alpha^2+\beta^2=2(4\alpha^2-4\alpha\beta+\beta^2),\\ 7\alpha^2-8\alpha\beta+\beta^2=0.\end{gathered}$$

У цьому рівнянні обидві невідомі не можуть дорівнювати нулю одночасно, тому приймемо $\beta=1$, тоді, розв'язавши квадратне рівняння $7\alpha^2-8\alpha+1=0$, отримуємо $\alpha_1=1$ і $\alpha_2=\frac{1}{7}$.

Отже, вектор $\vec{p_3}$ є колінеарним до вектора з координатами $(1;7)$, оскільки вектор з координатами $(1;1)$ є напрямним вектором прямої AB. Тоді:

а) пряма, яка паралельна до сторони AC і проходить через точку B, визначається рівнянням

$$\frac{x+4}{1}=\frac{y-2}{7} \text{ або } 7x-y+30=0;$$

б) висота, опущена з вершини B на пряму AC, визначається рівнянням

$$(x+4)+7(y-2)=0 \text{ або } x+7y-10=0$$

в) Нехай $M_0(x_0;y_0)$ довільна фіксована точка, яка належить шуканій медіані. Пряма, яка проходить через точку M_0 паралельно до вектора $\vec{p_3}(1;7)$, визначається рівнянням

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{7} \text{ або } 7x-y=7x_0-y_0.$$

Знайдемо точки перетину цієї прямої з прямими AB і BC. Для цього розв'яжемо системи рівнянь

$$\begin{cases} 7x-y=7x_0-y_0 \\ x-y+6=0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} 7x-y=7x_0-y_0 \\ x+2y=0. \end{cases}.$$

Отримуємо точки

$$A_1\left(\frac{7x_0-y_0+6}{6};\frac{7x_0-y_0+42}{6}\right),\ C_1\left(\frac{14x_0-2y_0}{15};-\frac{14x_0-2y_0}{30}\right).$$

Точка M_0 є серединою відрізка A_1C_1, тому

$$\frac{7x_0 - y_0 + 6}{6} + \frac{14x_0 - 2y_0}{15} = 2x_0 \text{ і } \frac{7x_0 - y_0 + 42}{6} - \frac{14x_0 - 2y_0}{30} = 2y_0.$$

Обидва рівняння спрощуються до рівняння $x_0 - 3y_0 + 10 = 0$. Оскільки точка M_0 довільна, то шукана медіана має рівняння $x - 3y + 10 = 0$.

Приклад 2.4. У деякій афінній системі координат відомі координати двох вершин $A(6;1)$, $B(2;-7)$ та координати точки перетину медіан $O(1;0)$ трикутника ABC. Запишіть рівняння сторін трикутника ABC та визначте координати третьої вершини C.

Розв'язання. Координати вершин A і B відомі, тому рівняння сторони AB можна записати як рівняння прямої, що проходить через дві точки $\frac{x-6}{4} = \frac{y-1}{8}$. Точка перетину медіан ділить кожну медіану у відношенні $2 : 1$, починаючи від вершини, зокрема, $AO : OM = 2 : 1$, тому $\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{OM}$. Позначивши координати основи медіани M через $(a;b)$, отримуємо $2(a-1;b) = (-5;-1)$ і, відповідно, $a = -\frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$. Точка M є серединою відрізка BC, якщо точка C має невідомі координати $(x;y)$, то $\frac{x+2}{2} = -\frac{3}{2}$, $\frac{y-7}{2} = -\frac{1}{2}$, звідки $C(-5;6)$. Позаяк всі вершини трикутника відомі, то дві інші сторони AC та BC цього трикутника матимуть рівняння $\frac{x-6}{-11} = \frac{y-1}{5}$ та $\frac{x-2}{-7} = \frac{y+7}{13}$ відповідно.

Зауваження. Точка перетину медіан, як відомо, є центром ваги трикутника, тому координати точки $C(x;y)$ можна знайти і так:

$$\frac{6+2+x}{3} = 1, \quad \frac{1-7+y}{3} = 0,$$

звідки $x = -5$, $y = 6$.

Приклад 2.5. У трикутнику ABC відомі координати двох вершин $A(3;-1)$, $B(15;2)$ та координати точки перетину висот $H(10;5)$. Запишіть рівняння сторін трикутника ABC та визначте координати третьої вершини C. Система координат прямокутна.

Розв'язання. Маючи точки A, B і H, запишемо рівняння сторони AB : $\frac{x-3}{12} = \frac{y+1}{3}$ та рівняння висот AH : $\frac{x-3}{7} = \frac{y+1}{6}$ і BH : $\frac{x-15}{-5} = \frac{y-2}{3}$. Сторони AC і BC трикутника ABC перпендикулярні до висот BH і AH, відповідно, тому

$$\vec{p}_{BH} = \vec{n}_{AC} = (-5;3), \; \vec{p}_{AH} = \vec{n}_{BC} = (7;6).$$

Рівняння сторін AC і BC можна записати загальними рівняннями $-5(x-3) + 3(y+1) = 0$ і $7(x-15) + 6(y-2) = 0$, відповідно. Точка C є точкою перетину сторін AC і BC, а отже, її координати $(9;9)$ є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} -5x + 3y + 18 = 0 \\ 7x + 6y - 117 = 0 \end{cases}$.

Приклад 2.6. У трикутнику ABC відомі координати двох вершин $A(1;9)$, $B(16;4)$ та координати точки перетину бісектрис $L(6;4)$. Запишіть рівняння сторін трикутника ABC та визначте координати третьої вершини C. Система координат прямокутна.

Розв'язання. Через точки A, B і L запишемо рівняння сторони AB : $\frac{x-1}{15} = \frac{y-9}{-5}$ та бісектрис AL і BL, відповідно

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-9}{-5} \;\text{ і }\; \frac{x-16}{-10} = \frac{y-4}{0}.$$

Симетричні точки A_c і B_c до точок A і B стосовно бісектрис BL та AL лежать на сторонах BC і AC, відповідно. Знайдемо ці точки. Спочатку опустимо перпендикуляр з точки A на бісектрису BL, отримуємо рівняння $-10(x-1)+0(y-9) = 0$. Точка перетину цього перпендикуляра і бісектриси BL, як розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 4 = 0 \end{cases}$, має координати $(1;4)$, а тому координати точки $A_c(x;y)$ знайдемо зі співвідношень $\frac{x+1}{2} = 1$, $\frac{y+9}{2} = 4$, тобто $A_c(1;-1)$. Аналогічно знаходимо координати точки $B_c(6;-6)$. Рівняння прямої AC можна записати як рівняння прямої, що проходить через точки A і B_c, а саме

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-9}{-15} \text{ або } 3x + y - 12 = 0.$$

Через точки B і A_c записуємо рівняння сторони BC

$$\frac{x-16}{-15}=\frac{y-4}{-5} \quad \text{або } x-3y-4=0.$$

Координати третьої вершини C трикутника ABC шукаємо як розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} 3x+y-12=0 \\ x-3y-4=0 \end{cases}$, тобто точка C має координати $(4;0)$.

Приклад 2.7. У системі координат $O_{\vec{e}_1\vec{e}_2}$, де $|\vec{e}_1|=2$, $|\vec{e}_2|=4$, $\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=\frac{2\pi}{3}$, задано рівняння прямої $x+2y-9=0$ і координати точки $A(-3;4)$.

а) Напишіть рівняння перпендикуляра, опущеного з точки A на задану пряму.

б) Знайдіть відстань від точки A до заданої прямої.

Розв'язання. а) Вектор $\vec{p}=(-2,1)$ є напрямним вектором заданої прямої. Точка $M(x;y)$ належить шуканому перпендикуляру тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{AM}$ перпендикулярний до вектора $\vec{p}$, тобто

$$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{p}=0.$$

Враховуючи розклад векторів $\overrightarrow{AM}$ і $\vec{p}$ по базових векторах, можна записати

$$((x+3)\vec{e}_1+(y-4)\vec{e}_2)\,(-2\vec{e}_1+\vec{e}_2)=0 \quad \text{або}$$

$$-2(x+3)\vec{e}_1^{\,2}+(x+3-2y+8)\vec{e}_1\vec{e}_2+(y-4)\vec{e}_2^{\,2}=0.$$

Врахувавши скалярний добуток базових векторів, отримуємо рівняння шуканого перпендикуляра

$$x-2y+11=0.$$

б) Знайдемо точку H перетину перпендикуляра, опущеного з точки A на задану пряму з цією прямою. Для цього розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} x-2y+11=0 \\ x+2y-9=0 \end{cases}$. Отримали $x=-1, y=5$. Шукана відстань дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{AH}$. Знайдемо

$$\overrightarrow{AH}^{\,2}=(2\vec{e}_1+\vec{e}_2)^2=4\vec{e}_1^{\,2}+4\vec{e}_1\vec{e}_2+\vec{e}_2^{\,2}=16-16+16=16.$$

Отже, $|\overrightarrow{AH}|=4$.

Вправи

2.1.1. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точку A і має напрямний вектор $\vec{p}$:

а) $A(2;-4)$, $\vec{p}=(3;4)$;

б) $A(-1;8)$, $\vec{p}=(-2;1)$;

в) $A(3;7)$, $\vec{p}=(1;0)$;

г) $A(-2;3)$, $\vec{p}=(0;1)$.

2.1.2. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точки A і B:

а) $A(3;-1)$, $B(2;2)$;

б) $A(-2;1)$, $B(3;-4)$.

2.1.3. Запишіть рівняння прямої, яка містить точку $A(-3;4)$ і паралельна до прямої:

а) $x-2y+5=0$;

б) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}$;

в) $x=2$;

г) $y=-3$;

ґ) $\begin{cases} x=3+t \\ y=4-7t \end{cases}$.

2.1.4. Запишіть рівняння прямої, яка містить точку $A(3;-4)$ і паралельна до прямої:

а) $2x-y+1=0$;

б) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{5}$;

в) $x=-1$;

г) $y=3$;

ґ) $\begin{cases} x=2-3t \\ y=5+t \end{cases}$.

2.1.5. Точки $A(0;-5), B(3;2), C(-2;0)$ — вершини трикутника. Запишіть рівняння сторін трикутника та рівняння медіани AM.

2.1.6. Точки $A(1;1), B(-3;-1), C(-5;3)$ є вершинами трикутника. Запишіть рівняння сторін трикутника та рівняння медіани BM.

2.1.7. На площині задано трикутник ABC, вершини якого мають координати $A(2;-1)$, $B(4;5)$, $C(-3;2)$. Запишіть рівняння прямої, що з'єднує центр ваги цього трикутника з початком координат.

2.1.8. Запишіть рівняння прямих, які проходять через вершини $A(-1;2)$, $B(3;-1)$, $C(0;4)$ трикутника ABC і є паралельними до протилежних сторін цього трикутника.

2.1.9. Перевірте, що чотири точки $A(-2;-2)$, $B(-3;1)$, $C(7;7)$ і $D(3;1)$ є вершинами трапеції. Запишіть рівняння середньої лінії та діагоналей цієї трапеції.

2.1.10. Дві медіани трикутника лежать на прямих $x+y=3$ і $2x+3y=1$, а точка $A(1;1)$ є вершиною трикутника ABC. Запишіть рівняння сторін трикутника.

2.1.11. Задано дві вершини трикутника $(3;-1)$ і $(1;4)$ і точка перетину його медіан $(0;2)$. Знайдіть координати третьої вершини трикутника і запишіть рівняння його сторін.

2.1.12. Запишіть рівняння прямих, рівновіддалених від трьох точок $A(3;-1)$, $B(9;1)$, $C(-5;5)$.

2.1.13. За яких значень параметра a прямі $ax-4y-6=0$ і $x-ay-3=0$

а) перетинаються;

б) паралельні;

в) збігаються?

2.1.14. За яких значень параметра a прямі $ax+9y-9=0$ і $x+ay-3=0$

а) перетинаються;

б) паралельні;

в) збігаються?

2.1.15. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точку $(2;-1)$ так, що відрізок цієї прямої, який відтинається осями координат, ділиться в цій точці навпіл.

2.1.16. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точку $(3;2)$ так, що відрізок цієї прямої, який відтинається осями координат, ділиться в цій точці навпіл.

2.1.17. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точку A перпендикулярно до вектора $\vec{n}$:

а) $A(0;4)$, $\vec{n}=(2;-1)$;

б) $A(1;1)$, $\vec{n}=(-1;3)$.

Система координат прямокутна.

2.1.18. Точки $A(0;-5), B(3;2), C(-2;0)$ є вершинами трикутника.

Запишіть рівняння висоти BH трикутника. Система координат прямокутна.

2.1.19. Точки $A(1;1), B(-3;-1), C(-5;3)$ — вершини трикутника. Запишіть рівняння висоти CH трикутника. Система координат прямокутна.

2.1.20. Визначте точку перетину висот трикутника ABC, якщо вершини мають координати $A(0;-2)$, $B(5;0)$, $C(-1;6)$. Система координат прямокутна.

2.1.21. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(-3;4)$ і перпендикулярна до прямої:

а) $x-2y+5=0$;

б) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}$;

в) $x=2$;

г) $y=-3$;

ґ) $\begin{cases} x=3+t \\ y=4-7t \end{cases}$.

Система координат прямокутна.

2.1.22. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(3;-4)$ і перпендикулярна до прямої:

а) $2x-y+1=0$;

б) $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{5}$;

в) $x=-1$;

г) $y=3$;

ґ) $\begin{cases} x=2-3t \\ y=5+t \end{cases}$.

Система координат прямокутна.

2.1.23. На пряму, яка проходить через точки $A(1;-2)$ і $B(0;-7)$, опущено перпендикуляр з точки $C(-3;4)$. Обчисліть відношення, в якому основа цього перпендикуляра (точка H) ділить відрізок AB і знайдіть координати точки H. Система координат прямокутна.

2.1.24. Задано рівняння сторін трикутника $x+2y+1=0$, $2x-y-2=0$, $2x+y+2=0$. Складіть рівняння висоти, опущеної на третю сторону. Система координат прямокутна.

2.1.25. Точка $H(-3;2)$ є точкою перетину висот трикутника, дві сторони якого лежать на прямих $y=2x$, $y=-x+3$. Складіть рівняння третьої сторони, якщо система координат прямокутна.

2.1.26. Задано координати двох вершин трикутника $A(-1;3)$, $B(2;5)$ і точки перетину його висот $H(1;4)$. Знайдіть координати третьої вершини трикутника і складіть рівняння його сторін. Система координат прямокутна.

2.1.27. У трикутнику ABC задано вершину $A(5;-1)$, рівняння медіан AM та BN, відповідно $x+2y-3=0$ та $x-y-3=0$ і рівняння $4x+y-15=0$ висоти CH. Знайдіть координати двох інших вершин трикутника та рівняння сторін цього трикутника. Система координат прямокутна.

2.1.28. У трикутнику ABC задано вершину $B(2;1)$, рівняння медіан BM та AN, відповідно, $x+2y-4=0$ та $x=0$ і рівняння $x-y+4=0$ висоти CH. Знайдіть координати двох інших вершин трикутника та рівняння сторін цього трикутника. Система координат прямокутна.

2.1.29. Знайдіть центр кола радіуса 8, яке дотикається до прямих $3x+4y=0$ і $3x-4y+10=0$. Система координат прямокутна.

2.1.30. Обчисліть відстань між прямими:

а) $2x-3y+5=0$ і $2x-3y-11=0$;

б) $x+2y-5=0$ і $-2x-4y-11=0$;

в) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{-1}$ і $\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y-4}{-1}$;

г) $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-7}{3}$ і $\dfrac{x-5}{-6}=\dfrac{y+1}{-9}$;

г) $\begin{cases} x=1-t \\ y=5+2t \end{cases}$ і $\begin{cases} x=4-t \\ y=-1+2t \end{cases}$;

д) $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-t \end{cases}$ і $\begin{cases} x=4-4t \\ y=-1+2t \end{cases}$.

Система координат прямокутна.

2.1.31. Обчисліть довжину висоти BH трикутника ABC заданого вершинами $A(-2;-2)$, $B(-3;1)$, $C(7;7)$. Система координат прямокутна.

2.1.32. Обчисліть довжину перпендикуляра опущеного з точки $P(4;-1)$ на пряму $12x-5y-27=0$. Система координат прямокутна.

2.1.33. На висоті BH трикутника ABC, вершини якого мають координати $A(3;1)$, $B(5;4)$, $C(1;3)$ знайдіть таку точку P, яка ділить висоту BH у відношенні $3:1$, починаючи від вершини B. Обчисліть площу чотирикутника $ABCP$. Система координат прямокутна.

2.1.34. На медіані AM трикутника ABC, вершини якого мають координати $A(0;5)$, $B(2;2)$, $C(4;6)$ знайдіть таку точку K, щоб площа чотирикутника $ABKC$ дорівнювала 14 кв. од. Система координат прямокутна.

2.1.35. Обчисліть площу трикутника, сторонами якого є осі координат і відрізок прямої $x+2y-6=0$. Система координат прямокутна.

2.1.36. Через точку $(4;-3)$ проведіть пряму так, щоб площа трикутника, обмеженого координатними осями і цією прямою, становила 3 кв. од. Система координат прямокутна.

2.1.37. На прямій $5x-y-4=0$ знайдіть точку, яка рівновіддалена від точок $A(1;0)$ і $B(-2;1)$. Система координат прямокутна.

2.1.38. Запишіть рівняння прямої, яка розташована на відстані 5 від прямої $4x-3y-12=0$. Система координат прямокутна.

2.1.39. Запишіть рівняння прямої, яка розташована на відстані $\sqrt{5}$ від прямої $x+2y-1=0$. Система координат прямокутна.

2.1.40. Нехай вершини трикутника ABC мають координати $A(1;2)$, $B(3;7)$, $C(5;-13)$. Обчисліть довжину перпендикуляра, опущеного з вершини B на медіану AM. Система координат прямокутна.

2.1.41. За осі прямокутної системи координат прийнято діагоналі ромба, які мають довжини 16 і 30, відповідно. Обчисліть відстань між паралельними сторонами ромба. Система координат прямокутна.

2.1.42. Запишіть рівняння прямої, яка розташована на однаковій відстані від прямих $4x-6y-3=0$ і $2x-3y+7=0$. Система координат прямокутна.

2.1.43. Задано дві прямі $3x+4y-10=0$ і $5x-12y+26=0$. Знайдіть точку O, яка розташована на відстані 5 від кожної з прямих. Система координат прямокутна.

2.1.44. Знайдіть координати вершин ромба, дві сторони якого визначаються прямими $2x-5y-1=0$, $2x-5y-34=0$, а діагональ — прямою $x+3y-6=0$. Система координат прямокутна.

2.1.45. Знайдіть кут між прямими:

а) $2x+y-1=0$ і $y-x=2$;

б) $x=4$ і $2x-y-2=0$;

в) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{-4}$ і $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-3}{3}$;

г) $\dfrac{x+5}{1}=\dfrac{y+2}{-1}$ і $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-3}{3}$;

Система координат прямокутна.

2.1.46. Знайдіть симетричну точку до точки $A(-2;-9)$ стосовно прямої $2x+5y-38=0$. Система координат прямокутна.

2.1.47. Знайдіть симетричну точку до точки $A(1;2)$ стосовно прямої $3x-y+9=0$. Система координат прямокутна.

2.1.48. Запишіть рівняння прямої, яка симетрична до прямої $3x-y+5=0$ стосовно прямої $x+y=1$. Система координат прямокутна.

2.1.49. Запишіть рівняння прямої, яка симетрична до прямої $3x-2y+6=0$ стосовно прямої $x-3y+5=0$. Система координат прямокутна.

2.1.50.* Точка $M(3;2)$ є центром паралелограма, а його сторони лежать на прямих, на кожній з яких розташовано, відповідно, точки $P(2;1)$, $Q(4;-1)$, $R(-2;0)$, $S(1;5)$. Знайдіть рівняння прямих, якщо система координат прямокутна.

2.1.51.* Точка $A(3;-2)$ є вершиною квадрата, а точка $M(1;1)$ — точкою перетину діагоналей квадрата. Запишіть рівняння сторін квадрата, якщо система координат прямокутна.

2.1.52.* Обчисліть площу ромба, якщо точка $A(0;-1)$ є його вершиною, точка $M(4;4)$ — точкою перетину діагоналей, а точка $P(2;0)$ лежить на стороні AB. Система координат прямокутна.

2.1.53. Точки $A(0;-5), B(3;2), C(-2;0)$ є вершинами трикутника. Запишіть рівняння бісектриси CK трикутника. Система координат прямокутна.

2.1.54. Точки $A(1;1), B(-3;-1), C(-5;3)$ є вершинами трикутника. Запишіть рівняння бісектриси AK трикутника. Система координат прямокутна.

2.1.55. Складіть рівняння бісектрис внутрішніх кутів трикутника, сторони якого лежать на прямих $3y=4x$, $4y=3x$ та $5x+12y=10$. Система координат прямокутна.

2.1.56. Складіть рівняння бісектриси того кута між прямими $x-7y=1$ і $x+y=-7$, в середині якого лежить точка $A(1;1)$. Система координат прямокутна.

2.1.57. Складіть рівняння бісектриси гострого кута між прямими $x-7y=1$ і $x+y=-7$. Система координат прямокутна.

2.1.58. Задано координати двох вершин трикутника $A(2;-1)$, $B(1;5)$ і точки перетину його бісектрис $L(3;0)$. Складіть рівняння сторін трикутника. Система координат прямокутна.

2.1.59. Складіть рівняння бісектрис кутів, утворених прямими $2x-$

$9y+18=0$, $6x+7y-21=0$. Перевірте, що отримані бісектриси перпендикулярні. Система координат прямокутна.

2.1.60. Точки $A(20;15)$, $B(-16;0)$, $C(-8;-6)$ є вершинами трикутника ABC. Знайдіть довжини радіусів і координати центрів вписаного й описаного кіл. Система координат прямокутна.

2.1.61. Обчисліть площу трикутника, утвореного бісектрисами зовнішніх кутів трикутника, сторони якого лежать на прямих $3x+3y-5=0$, $x-y-1=0$, $7x+y+1=0$. Система координат прямокутна.

2.1.62. Задано рівняння сторони трикутника $x+7y-6=0$ і рівняння бісектрис $x+y-2=0$ і $x-3y-6=0$, які виходять з кінців цієї сторони. Знайдіть рівняння двох інших сторін цього трикутника та координати вершин трикутника. Система координат прямокутна.

2.1.63. Задано рівняння сторін трикутника $3x+y-3=0$, $3x+4y=0$ і рівняння $x-y+5=0$ бісектриси одного з внутрішніх кутів цього трикутника. Запишіть рівняння третьої сторони трикутника. Система координат прямокутна.

2.1.64. В прямокутному трикутнику ABC катет AB задано рівнянням $x+2y-16=0$, вершина B прямого кута має координати $(8;4)$, а бісектриса кута A задається рівнянням $x+y-9=0$. Знайдіть координати вершин A, C, рівняння другого катета BC та гіпотенузи AC. Система координат прямокутна.

2.1.65. У прямокутному трикутнику ABC катет AC задано рівнянням $x+3y-6=0$, вершина C прямого кута має координати $(3;1)$, а бісектриса кута A задається рівнянням $x+y-8=0$. Знайдіть координати вершин A, B, рівняння другого катета BC та гіпотенузи AB. Система координат прямокутна.

2.1.66. Точка $A(1;2)$ є серединою однієї з основ прямокутної трапеції, а точка $B(3;-1)$ — середина середньої лінії. Бічна сторона перпендикулярна до основ і лежить на прямій $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{4}$. Складіть рівняння решти сторін трапеції. Система координат прямокутна.

2.1.67. Точка $M(1;0)$ є серединою основи AD рівнобічної трапеції $ABCD$, а точка $N(2;-1)$ — середина середньої лінії. Висота BH лежить на прямій $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}$. Складіть рівняння сторін трапеції, якщо гострий кут при основі AD становить 60°. Система координат прямокутна.

2.1.68. Точки $K(1;3)$ і $L(-1;1)$ є серединами основ рівнобічної трапеції, а точки $P(3;0)$ і $Q(-3;5)$ лежать на її бічних сторонах. Складіть рівняння сторін трапеції. Система координат прямокутна.

2.1.69. Складіть рівняння прямих, які проходять через точку $A(3;1)$ і утворюють з прямою $3x = y + 2$ кут $45°$. Система координат прямокутна.

2.1.70. Точка $A(2;0)$ є вершиною правильного трикутника, а протилежна до неї сторона лежить на прямій $x + y - 1 = 0$. Складіть рівняння двох інших сторін. Система координат прямокутна.

2.1.71. Основа рівнобедреного трикутника лежить на прямій $x + 2y = 2$, а одна з бічних сторін — на прямій $y + 2x = 1$. Складіть рівняння другої бічної сторони трикутника, якщо відомо, що відстань від неї до точки перетину заданих прямих дорівнює $\frac{1}{\sqrt{5}}$. Система координат прямокутна.

2.1.72. Точки $A(1;2)$, $B(-3;0)$ — вершини рівнобедреного трикутника ABC, кути A і B при основі дорівнюють $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$. Знайдіть координати вершини C, якщо відомо, що вона лежить з того самого боку від AB, що і точка $M(2;3)$. Система координат прямокутна.

2.1.73. Сторона AB трикутника ABC задана рівнянням $x-y-1=0$, сторона BC — рівнянням $2x-3y+5=0$, сторона AC — рівнянням $3x-4y+2=0$. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку C і точка перетину цієї прямої з стороною AB і лежить на відстані $\frac{1}{5}$ від сторони AC. Система координат прямокутна.

2.1.74. Обчисліть косинус того кута між прямими $x + 5y = 0$ і $10x + 2y + 1 = 0$, в якому лежить точка $(1;1)$. Система координат прямокутна.

2.1.75. Обчисліть косинус того кута між прямими $2x + 3y + 1 = 0$ і $6x + 4y + 5 = 0$, в якому лежить точка $(1;1)$. Система координат прямокутна.

2.1.76*. Задано вершини трикутника $A(-6;-3)$, $B(-4;3)$, $C(9;2)$. На бісектрисі кута A знайдіть таку точку M, щоб чотирикутник $ABMC$ був трапецією. Система координат прямокутна.

2.1.77. У системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$, де $|\vec{e}_1| = 3\sqrt{3}$, $|\vec{e}_2| = 2$, $\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_2) = \frac{\pi}{6}$ задано пряму $2x + y - 1 = 0$ і точку $A(3;-1)$. Знайдіть:

а) рівняння перпендикуляра, опущеного з точки A на задану пряму;

б) координати точки A', яка симетрична до точки A стосовно заданої прямої;

в) відстань від точки A до заданої прямої.

2.1.78. У системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$, де $|\vec{e}_1| = 1$, $|\vec{e}_2| = 2$, $\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_2) = \frac{\pi}{3}$ задано пряму $x + y + 1 = 0$ і точку $A(1;1)$. Знайдіть:

а) рівняння перпендикуляра, опущеного з точки A на задану пряму;

б) координати точки A', яка симетрична до точки A стосовно заданої прямої;

в) відстань від точки A до заданої прямої.

2.1.79. У системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$, де $|\vec{e}_1| = 2$, $|\vec{e}_2| = 3$, $\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_2) = \frac{\pi}{3}$ задано пряму $x - 2y + 3 = 0$ і точку $A(-2;1)$. Знайдіть:

а) координати точки, яка симетрична до точки A стосовно заданої прямої;

б) відстань від точки A до заданої прямої.

2.1.80. У системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$, де $|\vec{e}_1| = 1$, $|\vec{e}_2| = 2$, $\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_2) = \frac{2\pi}{3}$ задано пряму $3x + y - 2 = 0$ і точку $A(1;-4)$. Знайдіть:

а) координати точки, симетричної до точки A стосовно заданої прямої;

б) відстань від точки A до заданої прямої.

2.1.81. У системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$, де $|\vec{e}_1| = 2$, $|\vec{e}_2| = 3$, $\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_2) = \frac{\pi}{3}$, відомі вершини трикутника $A(1;1)$, $B(2;1)$, $C(3;0)$. Знайдіть координати центрів вписаного й описаного кіл.

2.1.82. У системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$, де $|\vec{e}_1| = 4, |\vec{e}_2| = 2, \angle(\vec{e}_1,\vec{e}_2) = \frac{\pi}{3}$ задано вершини трикутника $A(1;3)$, $B(1;0)$, $C(2;1)$. Запишіть рівняння:

а) бісектриси кута B цього трикутника;

б) висоти, опущеної з вершини B на сторону AC.

2.1.83. У системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$, де $|\vec{e}_1| = 1, |\vec{e}_2| = 3, \angle(\vec{e}_1,\vec{e}_2) = \frac{\pi}{4}$ задано вершини трикутника $A(1;1)$, $B(1;2)$, $C(-2;1)$. Запишіть рівняння:

а) бісектриси кута A цього трикутника;

б) висоти, опущеної з вершини A на сторону BC.

2.1.84. В афінній системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$ базові вектори задано співвідношеннями $|\vec{e}_1| = 1$, $|\vec{e}_2| = 3$, $\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_2) = \frac{\pi}{3}$. Стосовно цієї системи координат:

а) запишіть рівняння перпендикуляра, який опущено з точки $A(1;1)$ на пряму $x - 3y = 0$;

б) обчисліть відстань від точки A до цієї ж прямої.

Відповіді до розділу 2

2.1.1. а) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{4}$; б) $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-8}{1}$; в) $\frac{x-3}{1}=\frac{y-7}{0}$; г) $\frac{x+2}{0}=\frac{y-3}{1}$. **2.1.2.** а) $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+1}{3}$; б) $\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-1}$; **2.1.3.** а) $x-2y+11=0$; б) $\frac{x+3}{2}=\frac{y-4}{3}$; в) $x=-3$; г) $y=4$; ґ) $\begin{cases} x=-3+t \\ y=4-7t \end{cases}$. **2.1.4.** а) $2x-y-10=0$; б) $\frac{x-3}{1}=\frac{y+4}{5}$; в) $x=3$; г) $y=-4$; ґ) $\begin{cases} x=3-3t \\ y=-4+t \end{cases}$. **2.1.5.** $\frac{x}{3}=\frac{y+5}{7}\,(AB)$; $\frac{x}{-2}=\frac{y+5}{5}\,(AC)$; $\frac{x-3}{-5}=\frac{y-2}{-2}\,(BC)$; $\frac{x}{\frac{1}{2}}=\frac{y+5}{6}\,(AM)$. **2.1.6.** $\frac{x-1}{-4}=\frac{y-1}{-2}\,(AB)$; $\frac{x-1}{-6}=\frac{y-1}{2}\,(AC)$; $\frac{x+3}{-2}=\frac{y+1}{4}\,(BC)$; $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-2}{-3}\,(BM)$. **2.1.7.** $y=2x$. **2.1.8.** $\frac{x+1}{-3}=\frac{y-2}{5}$; $\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{2}$; $\frac{x}{4}=\frac{y-4}{-3}$. **2.1.9.** Середня лінія: $3x-5y+5=0$, діагоналі: $x-y=0$, $y-1=0$. **2.1.10.** $10x+11y-21=0$, $4x+5y-9=0$, $2x+y-15=0$. **2.1.11.** $(-4;3)$; $5x+2y-13=0$, $4x+7y-5=0$, $x-5y+19=0$. **2.1.12.** $2x+7y-12=0$, $3x+4y-18=0$, $x-3y+7=0$. **2.1.13.** а) $a\neq\pm2$; б) $a=-2$; в) $a=2$. **2.1.14.** а) $a\neq\pm3$; б) $a=-3$; в) $a=3$. **2.1.15.** $x-2y-4=0$. **2.1.16.** $2x+3y-12=0$. **2.1.17.** а) $2x-y+4=0$; б) $-x+3y-2=0$. **2.1.18.** $2x-5y+4=0$. **2.1.19.** $4x+2y+14=0$. **2.1.20.** $\left(\frac{11}{7};-\frac{3}{7}\right)$. **2.1.21.** а) $\frac{x+3}{1}=\frac{y-4}{-2}$; б) $2x+3y-6=0$; в) $y=4$; г) $x=-3$; ґ) $x-7y+31=0$. **2.1.22.** а) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{-1}$; б) $x+5y+17=0$; в) $y=-4$; г) $x=3$; ґ) $-3x+y+13=0$. **2.1.23.** Точка $H(2;3)$ лежить ззовні відрізка AB на такій самій відстані від точки A як і точка B від точки A. **2.1.24.** $5x-10y-11=0$. **2.1.25.** $x=5$. **2.1.26.** $(7;-5)$; $2x-3y+11=0$, $2x+y-9=0$, $x+y-2=0$. **2.1.27.** $B(1;-2)$, $C\,(3;3)$; $x-4y-9=0$, $2x+y-9=0$, $5x-2y-9=0$. **2.1.28.** $A(0;3)$, $C\,(-2;2)$; $x+y-3=0$, $x-2y+6=0$, $x+4y-6=0$. **2.1.29.** $\left(\frac{35}{3};\frac{5}{4}\right)$; $\left(-\frac{5}{3};-\frac{35}{4}\right)$; $\left(-\frac{5}{3};\frac{45}{4}\right)$; $\left(-15;\frac{5}{4}\right)$. **2.1.30.** а) $\frac{16\sqrt{13}}{13}$; б) $\frac{21\sqrt{5}}{10}$; в) $\frac{3\sqrt{10}}{5}$; г) $\frac{37\sqrt{13}}{13}$; ґ) 0; д) $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **2.1.31.** $2\sqrt{2}$. **2.1.32.** 2. **2.1.33.** $P\left(\frac{25}{8};\frac{17}{8}\right)$; $S=\frac{15}{4}$. **2.1.34.** $K_1(12;1)$; $K_2(-6;7)$. **2.1.35.** 9. **2.1.36.** $3x+8y+12=0$. **2.1.37.** $(3;11)$. **2.1.38.** $4x-3y-37=0$, $4x-3y+13=0$. **2.1.39.** $x+2y+4=0$, $x+2y-6=0$. **2.1.40.** $\frac{25\sqrt{34}}{34}$. **2.1.41.** $\frac{240}{17}$. **2.1.42.** $2x-3y+\frac{11}{4}=0$. **2.1.43.** $(1;8)$; $\left(-\frac{68}{7};\frac{99}{28}\right)$; $\left(\frac{72}{7};\frac{29}{28}\right)$; $\left(-\frac{3}{7};-\frac{24}{7}\right)$. **2.1.44.** $(3;1)$, $\left(\frac{81}{13};-\frac{56}{13}\right)$, $(12;-2)$, $\left(\frac{114}{13};\frac{43}{13}\right)$. **2.1.45.** а) $\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$; б) $\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{10}$. **2.1.46.** $(10;21)$. **2.1.47.** $(-5;4)$. **2.1.48.** $x-3y+7=0$. **2.1.49.** $6x+17y-15=0$. **2.1.50.** $x-2y+2=0$, $x-2y=0$, $y-5=0$; $y+1=0$. **2.1.51.** $5x-y-17=0$, $5x-y+9=0$, $x+5y+7=0$; $x+5y-19=0$. **2.1.52.** $\frac{492}{13}$. **2.1.53.** $\frac{x+2}{7}=\frac{y}{-3}$. **2.1.54.** $\frac{x-1}{3+2\sqrt{2}}=\frac{y-1}{-1+\sqrt{2}}$. **2.1.55.** $x-y=0$; $7x-56y+25=0$;

$77x+21y-50=0$. **2.1.56.** $3x-y+17=0$. **2.1.57.** $x+3y+9=0$. **2.1.58.** $6x+y-11=0$, $x+6y+4=0$, $146x+99y-641=0$. **2.1.59.** $34x+136y-663=0$, $136x-34y-51=0$. **2.1.60.** Центр описаного кола: $\left(-\frac{3}{16};\frac{51}{4}\right)$, радіус описаного кола: $\frac{325}{16}$, центр вписаного кола: $(-8;-1)$, радіус вписаного кола: 4. **2.1.61.** $\frac{416}{27}$. **2.1.62.** $\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)$, $(6;0)$, $(2;-4)$, $x-y-6=0$, $7x+y-10=0$. **2.1.63.** $x+3y-13=0$. **2.1.64.** $A(2;7)$, $C\left(\frac{23}{4};-\frac{1}{2}\right)$; $2x+y-1=0\,(AC)$, $2x-y-12=0\,(BC)$. **2.1.65.** $A(9;-1)$, $B\left(\frac{17}{3};9\right)$; $3x+y-26=0\,(AB)$, $3x-y-8=0\,(BC)$. **2.1.66.** $3x+4y-11=0$, $3x+4y+1=0$, $63x+59y-205=0$. **2.1.67.** $x+2y+1=0$, $x+2y-1=0$. **2.1.68.** $x+y-4=0$, $x+y=0$, $y=5$, $x=3$. **2.1.69.** $2x+y-7=0$, $x-2y-1=0$. **2.1.70.** $\frac{x-2}{-3-\sqrt{3}}=\frac{y}{-3+\sqrt{3}}$, $\frac{x-2}{-3+\sqrt{3}}=\frac{y}{-3-\sqrt{3}}$. **2.1.71.** $2x-11y+16=0$, $2x-11y+6=0$. **2.1.72.** $(-3;5)$. **2.1.73.** $11x-15y+11=0$. **2.1.74.** $-\frac{5}{13}$. **2.1.75.** $-\frac{12}{13}$. **2.1.76.** $(2;5)$. **2.1.77.** а) $9x+y-26=0$; б) $\left(\frac{29}{7};-\frac{79}{7}\right)$; в) $\frac{12\sqrt{21}}{7}$. **2.1.78.** а) $y=1$; б) $(-5;1)$; в) 3. **2.1.79.** а) $\left(-\frac{44}{37};\frac{15}{37}\right)$; б) $\frac{3\sqrt{111}}{37}$. **2.1.80.** а) $\left(\frac{121}{43};-\frac{148}{43}\right)$; б) $\frac{\sqrt{1131}}{49}$. **2.1.81.** Центр описаного кола: $\left(\frac{35}{18};\frac{11}{27}\right)$; центр вписаного кола: $\left(\frac{\sqrt{7}+2\sqrt{13}+6}{2+\sqrt{7}+\sqrt{13}};\frac{\sqrt{7}+\sqrt{13}}{2+\sqrt{7}+\sqrt{13}}\right)$. **2.1.82.** а) $(1+\sqrt{7})x-y-1-\sqrt{7}=0$; б) $2x-y-4=0$. **2.1.83.** а) $x+3y-4=0$; б) $x+3y-4=0$. **2.1.84.** а) $x+3y-4=0$; б) 1.

Розділ 3
Площина і пряма в просторі

3.1. Рівняння площини в просторі

Площина в просторі однозначно визначається точкою, через яку вона проходить, та двома неколінеарними векторами, які паралельні до цієї площини. Ці вектори називаються *напрямними векторами* цієї площини.

Задача 3.1. Нехай у деякій афінній системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$ площина π задається точкою $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і неколінеарними векторами $\vec{p} = (\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$ і $\vec{q} = (\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)$. Запишіть рівняння цієї площини.

Розв'язання. Розглянемо довільну точку $M(x; y; z)$. Ця точка належить площині π тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ компланарні, а це буде тоді і тільки тоді, коли мішаний добуток $(\overrightarrow{M_0M}, \vec{p}, \vec{q}) = 0$. З цього отримуємо

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.1)$$

— це і є *рівнянням площини*, яка містить точку M_0 і неколінеарні вектори $\vec{p}$ і $\vec{q}$.

Задача 3.2. Запишіть рівняння площини, яка проходить:

а) через три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, що не належать одній прямій;

б) через дві точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ і містить вектор $\vec{p} = (\alpha; \beta; \gamma)$, неколінеарний до вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Розв'язання. а) Вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$ та $\overrightarrow{M_1M_3}$ містяться в шуканій площині, тому згідно з рівнянням (3.1) рівняння площини набуде вигляду

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.2)$$

б) Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ міститься в шуканій площині, тому згідно з рівнянням (3.1) рівняння площини набуде вигляду

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.3)$$

З того, що вектори $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ компланарні і $\vec{p} \nparallel \vec{q}$, випливає, що існують такі параметри u і v, що

$$\overrightarrow{M_0M} = u\vec{p} + v\vec{q}, \qquad (3.4)$$

— це є *векторно-параметричним рівнянням* площини. Перейшовши в цьому рівнянні від рівностей векторів до рівностей координат, отримуємо

$$\begin{cases} x = x_0 + u\alpha_1 + v\alpha_2 \\ y = y_0 + u\beta_1 + v\beta_2 \\ z = z_0 + u\gamma_1 + v\gamma_2 \end{cases} \qquad (3.5)$$

— *параметричне* рівняння площини.

Нормальним вектором площини називається довільний ненульовий вектор, який перпендикулярний до цієї площини.

Теорема 3.1.1. *Множина точок простору, координати яких задовольняють рівняння першого порядку $ax + by + cz + d = 0$, є площиною, яка містить вектори $\vec{p} = (-b; a; 0)$, $\vec{q} = (-c; 0; a)$ та $\vec{r} = (0; -c; b)$.*

Лема 3.1.2. *Вектор $\vec{p} = (\alpha; \beta; \gamma)$ паралельний до площини, яку задано рівнянням $ax + by + cz + d = 0$ тоді і тільки тоді, коли*

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0.$$

Рівняння
$$ax + by + cz + d = 0 \tag{3.6}$$
називається *загальним* рівнянням площини, де нормальний вектор цієї площини в прямокутній системі координат колінеарний до вектора $\vec{n} = (a;\ b;\ c)$.

Приклад 3.1. Запишіть рівняння площини, яка проходить через точку $A(1;-1;2)$ і паралельна до площини $x - 2y + 2z + 1 = 0$.
Розв'язання. Вектори $\vec{p} = (2;1;0)$ і $\vec{q} = (-2;0;1)$ неколінеарні і належать площині $x - 2y + 2z + 1 = 0$. Тоді шукана площина містить точку A і вектори $\vec{p}$ і $\vec{q}$. Отже, ця площина задається рівнянням
$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$
Розкривши визначник, отримуємо загальне рівняння
$$x - 2y + 2z - 7 = 0.$$

Задача 3.3. У деякій системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$ задано точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і вектор $\vec{n} = (a;b;c)$. Напишіть рівняння площини, яка містить точку M_0 і перпендикулярна до вектора $\vec{n}$.
Розв'язання. Позначимо
$$\begin{array}{lll} g_{11} = (\vec{e}_1, \vec{e}_1) & g_{12} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) & g_{13} = (\vec{e}_1, \vec{e}_3) \\ g_{22} = (\vec{e}_2, \vec{e}_2) & g_{23} = (\vec{e}_2, \vec{e}_3) & g_{33} = (\vec{e}_3, \vec{e}_3) \end{array}. \tag{3.7}$$
Нехай π — шукана площина. Точка $M(x;y;z)$ належить площині π тоді і тільки тоді, коли $\left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}\right) = 0$. У цій системі координат цей скалярний добуток набуде вигляду
$$((x - x_0)\vec{e}_1 + (y - y_0)\vec{e}_2 + (z - z_0)\vec{e}_3)\,(a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3) = 0.$$
Перемножуючи скалярно і проводячи заміну згідно з позначеннями (3.7), отримуємо
$$\begin{gathered} a\,(g_{11}(x - x_0) + g_{12}(y - y_0) + g_{13}(z - z_0)) + \\ +b\,(g_{12}(x - x_0) + g_{22}(y - y_0) + g_{23}(z - z_0)) + \\ +c\,(g_{13}(x - x_0) + g_{23}(y - y_0) + g_{33}(z - z_0)) = 0. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Задача 3.4. У деякій прямокутній системі координат задано точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і вектор $\vec{n} = (a;b;c)$. Напишіть рівняння площини, яка містить точку M_0 і є перпендикулярною до вектора $\vec{n}$.
Розв'язання. В прямокутній системі координат
$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1,\ g_{12} = g_{13} = g_{23} = 0,$$
тому згідно з (3.8) рівняння площини набуде вигляду
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Приклад 3.2. У системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$, де $|\vec{e}_1| = 2$, $|\vec{e}_2| = 4$, $|\vec{e}_3| = 3$, $\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \frac{2\pi}{3}$, $\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = \frac{\pi}{3}$, $\angle(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = \frac{\pi}{2}$, задано точку $M_0(5;-2;1)$ і вектор $\vec{n} = (3;2;-4)$. Напишіть рівняння площини, яка містить точку M_0 і перпендикулярна до вектора $\vec{n}$.
Розв'язання. Спочатку обчислимо коефіцієнти $g_{11} = 4$, $g_{12} = -4$, $g_{13} = 3$, $g_{22} = 16$, $g_{23} = 0$, $g_{33} = 9$. Тоді, підставивши обчислені g_{ij} в рівняння (3.8), отримуємо рівняння площини
$$-8(x - 5) + 20(y + 2) - 27(z - 1) = 0$$
або загальне рівняння
$$8x - 20y + 27z - 107 = 0.$$

Вправи

3.1.1. Запишіть рівняння площини, яка проходить через точку $M(-1;2;0)$ і містить вектори $\vec{p} = (2;-3;1)$ і $\vec{q} = (-1;0;5)$.
3.1.2. Запишіть рівняння площини, яка проходить через точку $M(3;0;-2)$ і містить вектори $\vec{p} = (1;1;-1)$ і $\vec{q} = (0;3;2)$.
3.1.3. Запишіть рівняння площини, яка проходить через точки $A(1;2;3)$, $B(0;5;2)$ та містить вектор $\vec{p} = (-2;1;0)$.
3.1.4. Запишіть рівняння площини, яка проходить через точки $A(4;-1;1)$, $B(0;-1;2)$ та містить вектор $\vec{p} = (-1;3;1)$.
3.1.5. Запишіть рівняння площини, яка проходить через точки $A(3;-1;-1)$, $B(2;0;0)$ і $C(-2;1;0)$.
3.1.6. Запишіть рівняння площини, яка проходить через точки $A(4;1;1)$, $B(3;0;2)$ і $C(-1;1;0)$.

3.1.7. Задано точки $A(1;2;3)$, $B(3;2;1)$ і рівняння площини $x-2y+$ $+3z-4=0$. Запишіть:

а) рівняння площини, яка проходить через точку A паралельно до заданої площини;

б) рівняння площини, яка проходить через точки A, B перпендикулярно до заданої площини.

Система координат прямокутна.

3.1.8. Задано точки $A(-1;0;2)$, $B(-3;2;0)$ і рівняння площини $2x+$ $+y-3z-4=0$. Запишіть:

а) рівняння площини, яка проходить через точку B паралельно до заданої площини;

б) рівняння площини, яка проходить через точки A, B перпендикулярно до заданої площини.

Система координат прямокутна.

3.1.9. Запишіть загальне рівняння площини, якщо параметричне рівняння цієї площини набуде вигляду $\begin{cases} x=1+u-v \\ y=2+u+2v \\ z=-1-u+2v \end{cases}$.

3.1.10. Запишіть загальне рівняння площини, якщо параметричне рівняння цієї площини набуде вигляду $\begin{cases} x=3-u+3v \\ y=2+u-2v \\ z=1+2v \end{cases}$.

3.1.11. Площина визначена загальним рівнянням $2x+3y+z+1=0$. Складіть її параметричне рівняння.

3.1.12. Площина визначена загальним рівнянням $x-5y+4z-11=0$. Складіть її параметричне рівняння.

3.1.13. Задано трикутну піраміду $OABC$ з вершинами $O(0;0;0)$, $A(1;2;3)$, $B(-1;0;3)$, $C(7;-2;0)$. Запишіть рівняння грані ABC і площини, яка проходить через середини ребер OA, OB і OC.

3.1.14. Точки $A(1;0;3)$, $B(-1;2;1)$ — вершини трикутної піраміди $ABCD$, точка $K(-1;5;2)$ є серединою ребра BC, а точка $M(0;1;4)$ — точкою перетину медіан грані BCD. Запишіть рівняння площин, в яких лежать грані тетраедра.

3.1.15. Нехай у деякій прямокутній системі координат площини задано рівняннями:

а) $x=4$;

б) $2y-5=0$;

в) $x+z=0$;

г) $x+y+2z=0$;

ґ) $\begin{cases} x=-1+u \\ y=v \\ z=7 \end{cases}$.

З'ясуйте особливості розміщення площин у просторі стосовно координатних осей і координатних площин.

3.1.16. Запишіть рівняння площини, яка:

а) паралельна до осі Oz і містить точки $A(0;1;2)$, $B(2;-3;4)$;

б) проходить через вісь Ox і містить точку $A(10;4;1)$;

в) паралельна до площини Oxy і містить точку $A(5;2;-7)$;

г) паралельна до осі Ox і містить точки $A(-3;1;1)$, $B(2;4;-1)$;

ґ) проходить через вісь Oy і містить точку $A(2;8;3)$;

д) паралельна до площини Oxz і містить точку $A(8;10;1)$.

3.1.17.* На площині $2x+3y-4z+12=0$ вибрано афінну систему координат так, що початок цієї системи координат розташований у точці перетину C цієї площини з віссю Oz, а кінці базових векторів, відповідно, в точках перетину A і B площини з осями Ox і Oy.

а) Знайдіть просторові координати $(x;y;z)$ точки M, якщо відомо її координати $(1;1)$ в системі координат $C_{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}$.

б) Запишіть рівняння прямих AB, BC та AC в системі координат $C_{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}$.

3.2. Рівняння прямої в просторі

Пряма в просторі однозначно визначається точкою і ненульовим вектором, який паралельний до цієї прямої. Цей вектор називається *напрямним* вектором прямої.

Задача 3.5. Нехай у деякій афінній системі координат пряма l задається точкою $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і напрямним вектором $\vec{p}=(\alpha;\ \beta;\ \gamma)$. Запишіть рівняння прямої l.

Розв'язання. Нехай $M(x;y;z)$ довільна точка простору. Точка M належить прямій тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ паралельний до вектора $\vec{p}$. Це можливо тоді і тільки тоді, коли існує параметр $t\in\mathbb{R}$ такий, що

$$\overrightarrow{M_0M}=t\vec{p} \tag{3.9}$$

— *векторно-параметричне рівняння* прямої. Якщо перейти від рівності векторів до рівностей відповідних координат, то отримуємо

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases} - \qquad (3.10)$$

параметричне рівняння прямої.

Якщо з цих рівнянь вилучити параметр t, то одержимо

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}. \qquad (3.11)$$

Ця система рівнянь традиційно називається *канонічним рівнянням* прямої.

Теорема 3.2.1. *Множина точок простору, координати яких у деякій афінній системі координат задовольняють систему рівнянь*

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases},$$

де ранг матриці $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$ *дорівнює 2 є прямою, яка містить вектор*

$$\vec{p} = \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Приклад 3.3. Зведіть рівняння прямої $\begin{cases} x + 2y + z + 1 = 0 \\ x + y + z + 5 = 0 \end{cases}$ до канонічного вигляду.

Розв'язання. Знайдемо координати довільної точки A, що належить двом площинам одночасно (для цього достатньо одній змінній надати нульового значення і розв'язати систему з двох рівнянь і двох змінних). Нехай $z = 0$, тоді $y = 4$, $x = -9$. Напрямний вектор $\vec{p}$ прямої має координати

$$\vec{p} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (1; 0; -1).$$

Отож, можна записати канонічне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до вектора $\vec{p}$

$$\frac{x + 9}{1} = \frac{y - 4}{0} = \frac{z}{-1}.$$

Вправи

3.2.1. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точку A паралельно до прямої l :

а) $A(1; 1; 2)$, $l : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y + 1}{-1} = \dfrac{z - 3}{3}$;

б) $A(-1; 3; 4)$, $l : \dfrac{x + 5}{0} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z + 7}{5}$.

3.2.2. Запишіть рівняння прямої, яка містить точку $A(5; 2; 1)$ і є:

а) паралельною до осі Ox;

б) паралельною до осі Oy;

в) паралельною до координатних площин Oxy і Oxz;

г) паралельною до координатних площин Oyz і Oxz;

ґ) утворює рівні кути з осями координат.

Система координат прямокутна.

3.2.3. Зведіть рівняння прямої $\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ 2x + y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$ до канонічного вигляду.

3.2.4. Зведіть рівняння прямої $\begin{cases} 3x - 2y + z - 1 = 0 \\ 10x + 11y - z + 5 = 0 \end{cases}$ до канонічного вигляду.

3.2.5. Запишіть рівняння прямої $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3 + t \\ z = 5t \end{cases}$ в канонічному вигляді.

3.2.6. Запишіть рівняння прямої $\begin{cases} x = 6 - 4t \\ y = -2 + 7t \\ z = 5 \end{cases}$ в канонічному вигляді.

3.2.7. У просторі задано пряму $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = 5$. Знайдіть напрямний вектор цієї прямої.

3.2.8. У просторі задано пряму $\dfrac{y - 2}{-1} = \dfrac{z + 3}{2} = 4$. Знайдіть напрямний вектор цієї прямої.

3.2.9. Нехай у деякій прямокутній системі координат прямі задано рівняннями:

а) $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z+3}{0}$;

б) $\dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y}{-6}=\dfrac{z+3}{0}$;

в) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-4}{1}$;

г) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{0}$;

г) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-4}{1}$;

д) $\begin{cases} x-y=1 \\ z=2 \end{cases}$;

е) $\begin{cases} x=1 \\ z+y=2 \end{cases}$.

З'ясуйте розміщення прямих у просторі стосовно осей координат і стосовно координатних площин цієї системи координат.

3.2.10*. Задано дві точки перетину $(0;y_1;z_1)$ і $(x_2;0;z_2)$ деякої прямої з двома координатними площинами. Обчисліть координати точки перетину цієї прямої з третьою координатною площиною. Система координат афінна.

3.3. Розміщення прямих і площин у просторі

Твердження 3.3.1. *Нехай в афінній системі координат у просторі задано дві площини* $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ *та* $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$. *Ці площини:*

а) паралельні тоді і тільки тоді, коли $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}\neq\dfrac{d_1}{d_2}$;

б) збігаються тоді і тільки тоді, коли $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}=\dfrac{d_1}{d_2}$.

Твердження 3.3.2. *Нехай в афінній системі координат дві прямі* l_1 *і* l_2 *задаються, відповідно, різними точками* $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ *і напрямними векторами* $\vec{p_1}=(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)$, $\vec{p_2}=(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)$. *Прямі:*

а) l_1,l_2 *— мимобіжні тоді і тільки тоді, коли мішаний добуток*

$$(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{p_1},\vec{p_2})\neq 0;$$

б) l_1,l_2 *перетинаються тоді і тільки тоді, коли*

$$(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{p_1},\vec{p_2})=0$$

і вектори $\vec{p_1}$, $\vec{p_2}$ *неколінеарні;*

в) l_1,l_2 *— паралельні тоді і тільки тоді, коли вектори* $\vec{p_1}$, $\vec{p_2}$ *є колінеарними, а вектори* $\overrightarrow{M_1M_2}$ *і* $\vec{p_1}$ *не є колінеарними;*

г) l_1 *збігається з* l_2 *тоді і тільки тоді, коли вектори* $\vec{p_1}$, $\vec{p_2}$ *та* $\overrightarrow{M_1M_2}$ *колінеарні.*

Твердження 3.3.3. *Нехай у деякій афінній системі координат у просторі задано рівняння прямої* $\dfrac{x-x_0}{\alpha}=\dfrac{y-y_0}{\beta}=\dfrac{z-z_0}{\gamma}$ *і площини* $ax+by+cz+d=0$. *Тоді:*

а) пряма паралельна до площини тоді і тільки тоді, коли

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=0 \;\; і \;\; ax_0+by_0+cz_0+d\neq 0;$$

б) пряма лежить у площині тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} a\alpha+b\beta+c\gamma=0 \\ ax_0+by_0+cz_0+d=0 \end{cases}.$$

Приклад 3.4. Задано точку $M(5;3;0)$, рівняння площини $\pi_1:\ 2x-y+3z-1=0$ та рівняння прямої $l_1:\ \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{2}$. Знайдіть:

а) рівняння площини π_2, яка проходить через точку M паралельно до площини π_1;

б) рівняння площини π_3, яка проходить через точку M перпендикулярно до прямої l_1;

в) рівняння прямої l_2, яка проходить через точку M перпендикулярно до площини π_1;

г) рівняння прямої l_3, яка проходить через точку M паралельно до прямої l_1;

г) точку A перетину прямої l_1 і площини π_1.

Система координат прямокутна.

Розв'язання. а) Рівняння площини π_2, яка паралельна до площини π_1, можна записати у вигляді $2x-y+3z+d=0$. Точка M належить площині π_2, відповідно, її координати задовольняють рівняння цієї площини. Маємо $10-3+d=0$, звідки $d=-7$, отже,

$$\pi_2:\ 2x-y+3z-7=0.$$

б) Напрямний вектор $\vec{p} = (3;1;2)$ прямої l_1 буде нормальним вектором площини π_3, тому

$$\pi_3: \ 3(x-5)+(y-3)+2z=0 \ \text{ або } 3x+y+2z-18=0.$$

в) Нормальний вектор площини π_1 є напрямним вектором прямої l_2, отже,

$$l_2: \ \frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z}{3}.$$

г) Паралельні прямі мають однакові (пропорційні) напрямні вектори, тому

$$l_3: \ \frac{x-5}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}.$$

ґ) Щоб знайти точку A перетину прямої l_1 і площини π_1, запишемо пряму l_1 в параметричному вигляді $l_1: \begin{cases} x=1+3t \\ y=t \\ z=-2+2t \end{cases}$ і підставимо значення змінних x,y,z в рівняння площини

$$\pi_1: 2(1+3t)-t+3(-2+2t)-1=0.$$

Розв'язавши рівняння, отримали значення параметра $t=\frac{5}{11}$, яке відповідає точці A, тому $A\left(\frac{26}{11};\frac{5}{11};-\frac{12}{11}\right)$.

Приклад 3.5. Задано точки $A_1(1;2;3)$, $A_2(-2;0;1)$, $A_3(8;3;0)$ та $A_4(0;-4;6)$. Складіть рівняння:

а) прямої, яка проходить через точку A_4, перпендикулярно до площини $A_1A_2A_3$;

б) прямої, яка проходить через точку A_3, паралельно до прямої, яка проходить через точки A_1 і A_4;

в) площини, яка проходить через точку A_4, перпендикулярно до прямої A_1A_2.

Система координат прямокутна.

Розв'язання. Площина $A_1A_2A_3$ задається рівнянням

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2-1 & 0-2 & 1-3 \\ 8-1 & 3-2 & 0-3 \end{vmatrix}=0 \ \text{ або } \ 8x-23y+11z+5=0.$$

Рівняння прямої A_1A_2 запишемо як рівняння прямої через дві точки

$$\frac{x-1}{-2-1}=\frac{y-2}{0-2}=\frac{z-3}{1-3} \ \text{ або } \frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{-2}.$$

а) Нормальний вектор $\vec{n}=(8;-23;11)$ площини $A_1A_2A_3$ є напрямним вектором прямої, яка містить точку A_4 і є перпендикулярною до площини $A_1A_2A_3$, тому рівняння шуканої прямої становитиме

$$\frac{x}{8}=\frac{y+4}{-23}=\frac{z-6}{11}.$$

б) Вектор $\overrightarrow{A_1A_4}$ є напрямним для шуканої прямої, тому її рівняння таке:

$$\frac{x-8}{0-1}=\frac{y-3}{-4-2}=\frac{z}{6-3} \ \text{ або } \frac{x-8}{-1}=\frac{y-3}{-6}=\frac{z}{3}.$$

в) Напрямний вектор прямої A_1A_2 є нормальним вектором для шуканої площини, отже, площина матиме рівняння

$$-3x-2(y+4)-2(z-6)=0 \ \text{ або } 3x+2y+2z-4=0.$$

Приклад 3.6. Знайдіть координати точки A' симетричної до точки $A(1;2;1)$ стосовно прямої $l: \ \frac{x+4}{3}=\frac{y+7}{1}=\frac{z+6}{4}$. Система координат прямокутна.

Розв'язання. Запишемо рівняння площини, яка проходить через точку A і перпендикулярна до прямої l. Вектор $\vec{p}=(3;1;4)$ є напрямним вектором прямої l, тому він є нормальним вектором шуканої площини. Отже, площини, які перпендикулярні до заданої прямої, задаються рівнянням

$$3x+y+4z+\lambda=0.$$

Підставляємо координати точки A в це рівняння і отримуємо $\lambda=-9$. Отже, площина $3x+y+4z-9=0$ — перпендикулярна до прямої l і проходить через точку A. Знайдемо точку перетину цієї площини з прямою l. Для цього пряму l запишемо в параметричному вигляді

$\begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = -7 + t \\ z = -6 + 4t \end{cases}$ і підставимо x, y, z в рівняння площини. Матимемо

$$3(-4 + 3t) - 7 + t + 4(-6 + 4t) - 9 = 0,$$

звідки $t = 2$.

Значення $t = 2$ є значенням параметра, який відповідає точці перетину прямої з площиною. Підставивши це значення в параметричне рівняння прямої, отримуємо

$$\begin{aligned} x &= -4 + 3 \cdot 2 = 2 \\ y &= -7 + 2 = -5 \\ z &= -6 + 4 \cdot 2 = 2. \end{aligned}$$

Отож, координати точки H перетину прямої і площини — $(2; -5; 2)$. Ця точка H є основою перпендикуляра, опущеного з точки A на пряму l, і серединою відрізка AA', де A' точка симетрична до точки A стосовно прямої l. Нехай A' має координати $(x; y; z)$. Тоді

$$\frac{x+1}{2} = 2, \ \frac{y+2}{2} = -5, \ \frac{z+1}{2} = 2.$$

Звідси $x = 3, \ y = -12, \ z = 3$.

Отже, точка симетрична до точки A стосовно прямої l має координати $(3; -12; 3)$.

Приклад 3.7. Нехай у системі координат $O_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3}$ відомо, що $|\vec{e}_1| = 1$, $|\vec{e}_2| = 3$, $|\vec{e}_3| = 4$, $\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \frac{\pi}{2}$, $\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = \frac{\pi}{3}$, $\angle(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = \frac{2\pi}{3}$. Знайдіть координати точки A' симетричної до точки $A(1; 2; 3)$ стосовно прямої $l: \ \frac{x+4}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{2}$.

Розв'язання. Обчислимо коефіцієнти $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$, $g_{13} = 2$, $g_{22} = 9$, $g_{23} = -6$, $g_{33} = 16$ і запишемо рівняння площини π (див. (3.8)), яка містить точку A і перпендикулярна до напрямного вектора $\vec{p} = (0; 1; 2)$ прямої l

$$(9(y-2) - 6(z-3)) + 2(2(x-1) - 6(y-2) + 16(z-3)) = 0,$$

$$4x - 3y + 26z - 76 = 0.$$

Знайдемо точку перетину площини π з прямою l. Для цього розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} 4x - 3y + 26z - 76 = 0 \\ x = -4 \\ y = 2 + t \\ z = 2t \end{cases}$, отримуємо $t = 2$.

Отже, координати точки перетину площини і прямої становитимуть $(-4; 4; 4)$, а симетричної точки $A'(-9; 6; 5)$.

Приклад 3.8. Знайдіть координати точки A' симетричної до точки $A(-1; 3; 2)$ стосовно площини $\pi: \ x + 2y - z + 3 = 0$. Система координат прямокутна.

Розв'язання. Рівняння прямої, яка перпендикулярна до площини π і проходить через точку A, має параметричний вигляд $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$. Знайдемо точку перетину цієї прямої і площини π.

Для цього підставимо значення $x, \ y, \ z$ в рівняння площини

$$\begin{aligned} -1 + t + 2(3 + 2t) - (2 - t) + 3 = 0, \\ -1 + t + 6 + 4t - 2 + t + 3 = 0, \\ 6t = -6, \text{ звідси } t = -1. \end{aligned}$$

Отже, точка H перетину прямої з площиною має координати $(-2; 1; 3)$. Точка H є основою перпендикуляра, який опущений з точки A на площину π, а отже, є серединою відрізка AA', де A' точка симетрична до точки A стосовно площини π.

Нехай A' має координати $(x; y; z)$, тоді

$$\frac{x-1}{2} = -2, \ \frac{y+3}{2} = 1, \ \frac{z+2}{2} = 3.$$

Звідси $x = -3, \ y = -1, z = 4$, тобто $A'(-3; -1; 4)$.

Приклад 3.9. Нехай у системі координат $O_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3}$ відомо, що $|\vec{e}_1| = 2$, $|\vec{e}_2| = 3$, $|\vec{e}_3| = 1$, $\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \frac{\pi}{3}$, $\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = \frac{2\pi}{3}$, $\angle(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = \frac{\pi}{2}$. Знайдіть координати точки A' симетричної до точки $A(-1; 0; 2)$ стосовно площини $\pi: \ x + y - z - 1 = 0$.

Розв'язання. Обчислимо коефіцієнти $g_{11} = 4$, $g_{12} = 3$, $g_{13} = -1$, $g_{22} = 9$, $g_{23} = 0$, $g_{33} = 1$.

Вектори $\vec{p} = (-1;1;0)$, $\vec{q} = (1;0;1)$ — два неколінеарні вектори, які належать площині π. Запишемо рівняння площини π_1 (див. (3.8)), яка містить точку A і перпендикулярна до напрямного вектора $\vec{p}$

$$x - 6y - z + 3 = 0$$

і рівняння площини π_2, яка містить точку A і перпендикулярна до напрямного вектора $\vec{q}$

$$x + y + 1 = 0.$$

Очевидно, що площини π_1 і π_2 перетинаються по прямій, яка перпендикулярна до площини π і містить точку A. Отже, рівняння перпендикуляра до площини π з точки A на площину π, набуває вигляду

$$\begin{cases} x - 6y - z + 3 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}.$$

Знайдемо основу цього перпендикуляра. Розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x - 6y - z + 3 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$, отримуємо координати основи перпендикуляра $H\left(-\frac{11}{7}; \frac{4}{7}; -2\right)$. Тоді точка A' матиме координати $\left(-\frac{15}{7}; \frac{8}{7}; -6\right)$.

Вправи

3.3.1. З'ясуйте взаємне розміщення площин у просторі:

а) $5x - 4y - z + 12 = 0$ і $x + y + z - 9 = 0$;

б) $2x - y + z - 1 = 0$ і $8x - 4y + 4z - 14 = 0$;

в) $10x - 25y + 5z - 30 = 0$ і $-2x + 5y - z + 6 = 0$;

г) $\begin{cases} x = -1 + u - v \\ y = 2 - 2u + 3v \\ z = 4 + 3u - 2v \end{cases}$ і $x - 2y + z - 13 = 0$;

ґ) $\begin{cases} x = 1 + 5u - v \\ y = -2u + 3v \\ z = 4 - 2v \end{cases}$ і $\begin{cases} x = -1 + 2u - 3v \\ y = -2u + 3v \\ z = 7 + 3u + v \end{cases}$.

3.3.2. За яких значень параметра a площини $x + ay + z - 1 = 0$ і $ax + 9y + \frac{a^3}{9}z + 3 = 0$:

а) перетинаються; б) паралельні; в) збігаються?

3.3.3. За яких значень параметра a прямі $\frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-(a-2)^2}{a}$ і $\frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{1}$:

а) перетинаються; б) паралельні; в) збігаються; г) мимобіжні?

3.3.4. Задано дві прямі. З'ясуйте, чи вони перетинаються, мимобіжні, паралельні, збігаються. Якщо прямі перетинаються чи паралельні, то складіть рівняння площини, в якій вони лежать. Якщо прямі перетинаються, то знайдіть координати точки їхнього перетину. Прямі задано рівняннями:

а) $\begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ 3x + y - z + 13 = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 4 \end{cases}$ і $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -6t \\ z = -1 - 8t \end{cases}$ і $\begin{cases} x = 7 - 6s \\ y = 2 + 9s \\ z = 12s \end{cases}$;

г) $\begin{cases} x = 9t \\ y = 5t \\ z = -3 + t \end{cases}$ і $\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0 \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$;

ґ) $\begin{cases} x = 6 + 3s \\ y = -1 - 2s \\ z = -2 + s \end{cases}$ і $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 7 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$.

3.3.5. Знайдіть точку перетину прямої $\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ і площини $3x + 5y - z - 2 = 0$.

3.3.6. Знайдіть точку перетину прямої $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$ і площини $3x - 3y + 2z - 5 = 0$.

3.3.7. Перевірте, чи лежить задана пряма в площині $x - 3y + z + 1 = 0$, паралельна до площини, чи перетинає її в одній точці (якщо перетинає площину в одній точці, то знайдіть координати точки перетину). Пряма задана рівнянням:

а) $\frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{7}$;

б) $\begin{cases} x-y+2z=0 \\ x+y-3z+2=0 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x=2+3t \\ y=7+t \\ z=1+t \end{cases}$;

г) $\begin{cases} 3x-2y-1=0 \\ 7y-3z-4=0 \end{cases}$;

ґ) $\begin{cases} x=2 \\ y=5+t \\ z=4+3t \end{cases}$.

Система координат прямокутна.

3.3.8. За яких значень параметра a пряма $\frac{x}{1}=\frac{y}{a}=\frac{z-2}{-1}$:

а) перетинає площину $3a^2x+ay+z-4a=0$ в одній точці;

б) паралельна до заданої площини;

в) лежить у заданій площині?

3.3.9. Запишіть рівняння площини, яка проходить через точку $A(1;3;0)$ і є паралельною до прямих $\begin{cases} 2x-y+5z+1=0 \\ x+y+z+3=0 \end{cases}$ та $\begin{cases} 5x+y-z+2=0 \\ -x+y=1 \end{cases}$.

3.3.10. Запишіть рівняння прямої, яка містить точку $A(3;-1;-4)$, перетинає вісь Oy і є паралельною до площини $y+2z=0$. Система координат прямокутна.

3.3.11. Запишіть рівняння прямої, яка лежить в площині $y+2z=0$ та перетинає прямі $\begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=4t \end{cases}$ і $\begin{cases} x=2-s \\ y=4+2s \\ z=1 \end{cases}$.

3.3.12. Запишіть рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{2}$ і паралельна до прямої $\frac{x}{5}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+1}{3}$.

3.3.13. Запишіть рівняння площини, яка проходить через точку $A(-1;1;2)$ і пряму, задану рівнянням:

а) $\begin{cases} x=1+5t \\ y=-1+t \\ z=2t \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+5y-7z+1=0 \\ 3x-y+2z+3=0 \end{cases}$.

3.3.14. Запишіть рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z}{-3}$ і паралельна до прямої $\begin{cases} x=-1-3t \\ y=2+t \\ z=-2t \end{cases}$.

3.3.15. Запишіть рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x-2}{0}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-3}$ і паралельна до прямої $\begin{cases} x=-1-t \\ y=2+t \\ z=-2t \end{cases}$.

3.3.16. Пряма проектується на площину Oyz паралельно до осі Ox. Запишіть рівняння проекції, якщо пряма задана рівнянням:

а) $\begin{cases} x=1+2t \\ y=3t \\ z=1-t \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x+2y-3z+2=0 \end{cases}$.

3.3.17. Пряма проектується на площину $x+2y-3z+2=0$ паралельно до вектора $\vec{l}=(2;1;-1)$. Запишіть рівняння проекції, якщо пряма задана рівнянням:

а) $\begin{cases} x=1+2t \\ y=5t \\ z=-6-t \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ y-3z+4=0 \end{cases}$.

3.3.18. Знайдіть рівняння ортогональної проекції прямої на площину $2x-3y+z-3=0$, якщо пряма задається рівнянням:

а) $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2+t \\ z=-6-2t \end{cases}$; б) $\begin{cases} x-y-z-2=0 \\ y-z+2=0 \end{cases}$.

Система координат прямокутна.

3.3.19. Пряма проектується на площину $4x+y-3z-1=0$ з точки $O(1;2;3)$. Знайдіть рівняння проекції прямої, якщо пряма задається рівнянням:

а) $\begin{cases} x=2-3t \\ y=4+2t \\ z=-t \end{cases}$; б) $\begin{cases} 6x-3y-z-2=0 \\ x-5z+2=0 \end{cases}$.

3.3.20. Пряма проектується на площину $3x+2y-5z+1=0$ паралельно до вектора $\vec{a}=(2;0;1)$. Знайдіть рівняння проекції прямої, якщо вона задається рівнянням:

а) $\begin{cases} x=-1-4t \\ y=-2+3t \\ z=6 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 4x+2z-11=0 \\ y-4z+15=0 \end{cases}$.

3.3.21. Три грані паралелепіпеда лежать у площинах $x+3z+18=0$, $2x-4y+5z-21=0$, $6x+y+z-30=0$, а одна з його вершин має координати $A(-1;3;1)$. Запишіть рівняння решти граней паралелепіпеда і його діагоналі, яка проходить через точку A.

3.3.22. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точку $O(0;0;0)$ і перетинає дві задані прямі:

а) $\begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ x - y + 2z + 4 = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x - y + z + 2 = 0 \\ x - 2y + 3z - 8 = 0 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = -t \end{cases}$ і $\begin{cases} x = 4s \\ y = 5 - 5s \\ z = 3 + 2s \end{cases}$.

3.3.23. Знайдіть координати точки A', яка є симетричною до точки $A(4;-1;3)$ стосовно площини $\pi:\ 3x - y + 2z = 0$. Система координат прямокутна.

3.3.24. Знайдіть координати точки A', яка є симетричною до точки $A(0;-1;1)$ стосовно площини $\pi:\ 2x - 3y + z - 1 = 0$. Система координат прямокутна.

3.3.25. Знайдіть рівняння симетричної прямої до прямої $l: \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{2}$ стосовно площини $\pi:\ x + 2y - 2z + 10 = 0$. Система координат прямокутна.

3.3.26. Знайдіть координати точки A', яка є симетричною до точки $A(4;3;10)$ стосовно прямої $l:\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-3}{5}$. Система координат прямокутна.

3.3.27. Знайдіть координати точки A', яка є симетричною до точки $A(3;2;6)$ стосовно прямої $l:\ \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+7}{2} = \dfrac{z-3}{-1}$. Система координат прямокутна.

3.3.28. Запишіть рівняння прямої, яка перетинає дві задані прямі $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z}{1}$, $\dfrac{x-10}{5} = \dfrac{y+7}{4} = \dfrac{z}{1}$ і є паралельною до прямої $\dfrac{x+2}{8} = \dfrac{y-1}{7} = \dfrac{z-3}{1}$.

3.3.29. Запишіть рівняння площини, яка проходять через точку $A(2;1;-1)$ і перпендикулярна до двох площин $x - y + 5z + 1 = 0$, $2x + y = 3$. Система координат прямокутна.

3.3.30. Нехай у системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$ відомо, що $|\vec{e}_1| = 1$, $|\vec{e}_2| = 1$, $|\vec{e}_3| = 2$, $\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_2) = \dfrac{\pi}{2}$, $\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_3) = \dfrac{\pi}{3}$, $\angle(\vec{e}_2,\vec{e}_3) = \dfrac{\pi}{3}$. Знайдіть:

а) рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(1;1;1)$ на площину $x + y + z + 1 = 0$;

б) координати точки A' симетричної до точки A стосовно заданої площини.

3.3.31. Нехай у системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$ відомо, що $|\vec{e}_1| = 3$, $|\vec{e}_2| = \sqrt{2}$, $|\vec{e}_3| = 4$, $\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_2) = \dfrac{\pi}{4}$, $\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_3) = \dfrac{\pi}{3}$, $\angle(\vec{e}_2,\vec{e}_3) = \dfrac{\pi}{4}$. Знайдіть:

а) рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(1;2;3)$ на пряму $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{2}$;

б) координати точки A' симетричної до точки A стосовно площини $2x + y + z + 1 = 0$;

в) координати точки A' симетричної до точки A стосовно прямої $\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 5 \end{cases}$.

3.3.32.* Знайдіть геометричне місце точок, які ділять в однаковому відношенні відрізки, кінці яких розташовані на двох прямих, що перетинаються.

3.3.33.* Доведіть, що шість площин, кожна з яких містить ребро трикутної піраміди і середину ребра, мимобіжного до цього ребра, перетинаються в одній точці.

3.4. Метричні задачі стосовно прямих і площин у просторі

Розглянемо деякі метричні питання теорії прямих і площин у просторі, тобто задачі, до формулювання яких входять поняття довжини відрізка і величини кута.

Означення 3.4.1. *Відстанню між множинами* $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ в просторі називається число $d(\mathcal{A},\mathcal{B})$, яке дорівнює

$$d(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \inf\{|AB| : A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}. \tag{3.12}$$

Задача 3.6. У прямокутній системі координат в просторі задано точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і площину $\pi: ax + by + cz + d = 0$. Нехай $d(M_0,\pi)$ відстань від точки M_0 до площини π. Доведіть, що

$$d(M_0,\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \tag{3.13}$$

Розв'язання. Нехай $M_1(x_1;y_1;z_1)$ — основа перпендикуляра, опущеного з точки M_0 на площину π. Нормальний вектор $\vec{n}$ площини π

має координати $(a;b;c)$ і є колінеарним до вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$. За означенням скалярного добутку одержуємо

$$\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\vec{n} = |\overrightarrow{M_1M_0}|\cdot|\vec{n}|\cos\angle(\overrightarrow{M_1M_0},\vec{n}) = \pm|\overrightarrow{M_1M_0}|\cdot|\vec{n}|.$$

Отож,

$$d(M_0,\pi) = |\overrightarrow{M_1M_0}| = \frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_0}|}{|\vec{n}|} =$$
$$= \frac{|a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} =$$
$$= \frac{|ax_0+by_0+cz_0-ax_1-by_1-cz_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Оскільки точка M_1 належить площині π, то $ax_1+by_1+cz_1+d = 0$, а отже, $d=-ax_1-by_1-cz_1$ і тому

$$d(M_0,\pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Задача 3.7. Нехай пряма l у просторі задається точкою M_1 і напрямним вектором $\vec{p}$, M_0 — довільна точка простору, $d(M_0,l)$ — відстань від точки M_0 до прямої l. Доведіть, що

$$d(M_0,l) = \frac{|[\overrightarrow{M_1M_0},\vec{p}]|}{|\vec{p}|}. \tag{3.14}$$

Розв'язання. Нехай H основа перпендикуляра, який опущено з точки M_0 на пряму l. Розглянемо паралелограм $M_0M_1N_1N_0$, який побудовано на векторах $\overrightarrow{M_1M_0}$ і $\vec{p}=\overrightarrow{M_1N_1}$ (див. рис. 19), де N_1 деяка точка прямої l.

Відстань від точки M_0 до прямої l дорівнює довжині висоти M_0H паралелограма $M_0M_1N_1N_0$. Тоді

$$d(M_0,l) = |M_0H| = \frac{S_{\text{паралелограма}}}{|M_1N_1|} = \frac{S_{\text{паралелограма}}}{|\vec{p}|}.$$

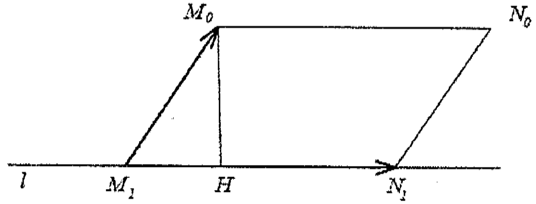


Рис. 19

Відомо, що $S_{\text{паралелограма}} = |[\overrightarrow{M_1M_0},\vec{p}]|$. Отже,

$$d(M_0,l) = \frac{|[\overrightarrow{M_1M_0},\vec{p}]|}{|\vec{p}|}.$$

Задача 3.8. Нехай пряма l_1 в просторі задається точкою M_1 та напрямним вектором $\vec{p}_1$, пряма l_2 — точкою M_2 та напрямним вектором $\vec{p}_2$, $d(l_1,l_2)$ — відстань між прямими l_1 і l_2. Доведіть, що

$$d(l_1,l_2) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{p}_1,\vec{p}_2\right)\right|}{|[\vec{p}_1,\vec{p}_2]|}. \tag{3.15}$$

Розв'язання. Перенесемо вектори $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ в точку M_1 і побудуємо паралелепіпед на векторах $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, і $\overrightarrow{M_1M_2}$ (див. рис. 20).

У побудованому паралелепіпеді позначимо кінець вектора $\vec{p}_1$ точкою N_1, кінець вектора $\vec{p}_2$ точкою Q_1 і четверту вершину паралелограма основи точкою P_1. Верхня основа паралелепіпеда буде, відповідно, паралелограмом $M_2N_2P_2Q_2$. Очевидно, що пряма l_1 збігається з прямою M_1N_1, а пряма l_2 — з прямою M_2Q_2. Нехай π_1 площина, яка містить грань $M_1N_1P_1Q_1$, а π_2 — площина, яка містить грань $M_2N_2P_2Q_2$. Тоді шукана відстань $d(l_1,l_2)$ між прямими дорівнює відстані між площинами $d(\pi_1,\pi_2)$, а ця відстань — це довжина висоти M_2H побудованого нами паралелепіпеда $M_1N_1P_1Q_1M_2N_2P_2Q_2$. Отже,

$$d(l_1,l_2) = |M_2H| = \frac{V_{\text{паралелепіпеда}M_1N_1P_1Q_1M_2N_2P_2Q_2}}{S_{\text{паралелограма}M_1N_1P_1Q_1}}.$$

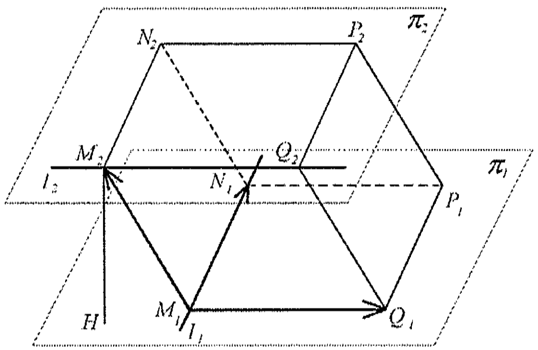


Рис. 20

З властивостей векторного та мішаного добутків випливає, що

$$V_{\text{паралелепіпеда} M_1N_1P_1Q_1M_2N_2P_2Q_2} = |(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{p}_1, \vec{p}_2)|,$$

$$S_{\text{паралелограма} M_1N_1P_1Q_1} = |[\vec{p}_1, \vec{p}_2]|,$$

тому

$$d(l_1, l_2) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{p}_1, \vec{p}_2\right)\right|}{|[\vec{p}_1, \vec{p}_2]|}.$$

Твердження 3.4.2. *Нехай вектори $\vec{n}_1$ та $\vec{n}_2$ — нормальні вектори площин π_1 і π_2, відповідно, і нехай φ — гострий кут між площинами π_1 і π_2. Тоді*

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}. \tag{3.16}$$

Твердження 3.4.3. *Нехай вектори $\vec{p}_1$ та $\vec{p}_2$ — напрямні вектори прямих l_1 і l_2, відповідно, і нехай φ — гострий кут між прямими l_1 і l_2. Тоді*

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2|}{|\vec{p}_1| \cdot |\vec{p}_2|}. \tag{3.17}$$

Задача 3.9. Нехай вектор $\vec{p}$ — напрямний вектор прямої l, вектор $\vec{n}$ — нормальний вектор площини π і α — кут між прямою l і площиною π. Доведіть, що

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{n}|}{|\vec{p}| \cdot |\vec{n}|}. \tag{3.18}$$

Розв'язання. Позначимо через β кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{n}$. Якщо $\beta < \frac{\pi}{2}$, то $\sin\alpha = \cos\beta$, якщо ж $\beta > \frac{\pi}{2}$, то $\sin\alpha = -\cos\beta$. Оскільки $\sin\alpha > 0$, то для довільного α виконується, що

$$\sin\alpha = |\cos\beta| = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{n}|}{|\vec{p}| \cdot |\vec{n}|}.$$

Приклад 3.10. Задано точки $A_1(1;2;3)$, $A_2(-2;0;1)$, $A_3(8;3;0)$ та $A_4(0;-4;6)$. Обчисліть:

а) кут між прямою A_1A_4 і площиною $A_1A_2A_3$;

б) кут між площинами $A_1A_2A_3$ і $A_1A_4A_3$.

Система координат прямокутна.

Розв'язання. Площина $A_1A_2A_3$ задається рівнянням

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2-1 & 0-2 & 1-3 \\ 8-1 & 3-2 & 0-3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad 8x - 23y + 11z + 5 = 0.$$

а) Знайдемо вектори $\overrightarrow{A_1A_4} = (-1;-6;3)$ та нормальний вектор $\vec{n} = (8;-23;11)$ площини $A_1A_2A_3$. Згідно з задачею 3.9 синус кута φ між прямою і площиною становитиме

$$\sin\varphi = \frac{163}{\sqrt{714}\sqrt{46}}.$$

б) Кут між площинами — це кут між нормальними векторами цих площин, нормальний вектор площини $A_1A_2A_3$ дорівнює $\vec{n} = (8;-23;11)$, знайдемо нормальний вектор площини $A_1A_4A_3$ (як векторний добуток двох векторів, які належать цій площині).

$$\vec{n}_1 = [\overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & 1 & -3 \\ -1 & -6 & 3 \end{vmatrix} = (-15;-18;-41).$$

$$\cos\angle(A_1A_2A_3, A_1A_4A_3) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{n}_1}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}_1|} = \frac{-83}{\sqrt{2230}\sqrt{650}}.$$

Приклад 3.11. Запишіть рівняння спільного перпендикуляра до двох прямих

$$\frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{1}, \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{1}.$$

Система координат прямокутна.

Розв'язання. Вектори $\vec{p} = (8;4;1)$ і $\vec{q} = (2;-2;1)$ — напрямні вектори заданих прямих, відповідно. Знайдемо векторний добуток цих векторів

$$\vec{r} = [\,\vec{p}, \vec{q}\,] = \left(\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (6;-6;-24) = 6 \cdot (1;-1;-4).$$

Запишемо рівняння двох площин, які проходять через задані прямі паралельно до вектора $\vec{r}$

$$\pi_1: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 8 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \pi_2: \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Очевидно, шуканий спільний перпендикуляр є перетином цих площин, тобто задається рівнянням

$$\begin{cases} 5x - 11y + 4z + 5 = 0 \\ x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

Задача 3.10. У системі координат $O_{\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3}$, де $|\vec{e}_1| = \sqrt{2}$, $|\vec{e}_2| = 4$, $|\vec{e}_3| = 1$, $\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \dfrac{\pi}{2}$, $\angle(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = \dfrac{2\pi}{3}$, $\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = \dfrac{\pi}{4}$, задано точку $A(1;2;3)$ і площина $x - y + z + 4 = 0$.

а) Напишіть рівняння перпендикуляра, опущеного з точки A на задану площину.

б) Знайдіть відстань від точки A до заданої площини.

Розв'язання.

Обчислимо скалярні добутки базових векторів

$$\vec{e}_1^{\,2} = 2,\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0,\ \vec{e}_2^{\,2} = 16,\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 1,\ \vec{e}_3^{\,2} = 1,\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = -2.$$

а) Вектори $\vec{p}(1;1;0)$, $\vec{q}(-1;0;1)$ неколінеарні і належать заданій площині. Точка $M(x;y;z)$ належить шуканому перпендикуляру тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{AM} = (x-1; y-2; z-3)$ перпендикулярний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, тобто $\begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \vec{p} = 0 \\ \overrightarrow{AM} \cdot \vec{q} = 0 \end{cases}$ або

$$\begin{cases} ((x-1)\vec{e}_1 + (y-2)\vec{e}_2 + (z-3)\vec{e}_3)\,(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = 0 \\ ((x-1)\vec{e}_1 + (y-2)\vec{e}_2 + (z-3)\vec{e}_3)\,(-\vec{e}_1 + \vec{e}_3) = 0. \end{cases}$$

Врахувавши скалярні добутки базових векторів, одержимо рівняння перпендикуляра як перетин двох площин

$$\begin{cases} 2x + 16y - z - 31 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases}.$$

б) Нехай точка H — основа перпендикуляра, опущеного з точки A на задану площину, тоді її координати можна визначити як розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} 2x + 16y - z - 31 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \\ x - y + z + 4 = 0 \end{cases}$, а саме $H\left(\dfrac{7}{3}; \dfrac{4}{3}; -5\right)$.

Відстанню від точки A до заданої площини буде довжина вектора $\overrightarrow{AH} = \left(\dfrac{4}{3}; -\dfrac{2}{3}; -8\right)$, тобто

$$|\overrightarrow{AH}| = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\vec{e}_1 - \frac{2}{3}\vec{e}_2 - 8\vec{e}_3\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{16}{9}\,\vec{e}_1^{\,2} + \frac{4}{9}\,\vec{e}_2^{\,2} + 64\,\vec{e}_3^{\,2} - \frac{16}{9}\,\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 - \frac{64}{3}\,\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 + \frac{32}{3}\,\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3} =$$

$$= \sqrt{\frac{16}{9} \cdot 2 + \frac{4}{9} \cdot 16 + 64 \cdot 1 - \frac{16}{9} \cdot 0 - \frac{64}{3} \cdot 1 + \frac{32}{3} \cdot (-2)} =$$

$$= \sqrt{\frac{288}{9}} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

Вправи

У вправах 3.4.1–3.4.21 систему координат вважаємо прямокутною.

3.4.1. Обчисліть кут між площинами:

а) $3x - 4y + z = 0$, $x + 2y - 2z + 1 = 0$;

б) $x = 1$, $y = 8$;

в) $x + y = 0$, $y - z = 0$;

г) $\begin{cases} x = 1 + 5u - v \\ y = -2u + 3v \\ z = 4 - 2v \end{cases}$, $\begin{cases} x = -1 + 2u - 3v \\ y = -2u + 3v \\ z = 7 + 3u + v \end{cases}$.

3.4.2. Обчисліть відстань від точки M_0 до площини π, якщо:

а) $M_0(3;1;-1)$, $\pi: 22x+4y-20z-45=0$;

б) $M_0(4;3;-2)$, $\pi: 3x-y+5z+1=0$.

3.4.3. Обчисліть висоту h_S піраміди $SABC$, якщо відомі координати вершин піраміди $S(0;6;4)$, $A(3;5;3)$, $B(-2;11;-5)$, $C(1;-1;4)$.

3.4.4. Обчисліть висоту h_S піраміди $SABC$, якщо відомі координати вершин піраміди $S(5;3;2)$, $A(0;3;1)$, $B(2;\frac{3}{2};-1)$, $C(-4;6;3)$.

3.4.5. Обчисліть відстань між площинами π_1 і π_2:

а) $\pi_1: 11x-2y-10z+15=0$ і $\pi_2: 11x-2y-10z-45=0$;

б) $\pi_1: 12x-3y+9z-48=0$ і $\pi_2: -4x+y-3z+16=0$.

3.4.6. На відстані 3 від площини $3x-6y-2z+14=0$ проведіть паралельну до заданої площину.

3.4.7. Складіть рівняння площини, знаючи, що точки $A(6;1;-1)$, $B(0;5;4)$ і $C(5;2;0)$ лежать на відстані 1, 3 і 0 від неї.

3.4.8. На осі Oz знайдіть точку, рівновіддалену від площин $x+4y-3z-2=0$ і $5x+z+8=0$.

3.4.9. Знайдіть кут між прямими:

а) $\begin{cases} x=1+2s \\ y=2+3s \\ z=-2-s \end{cases}$ і $\begin{cases} x=-1-3t \\ y=4t \\ z=10+6t \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 2x+y-z+1=0 \\ x+3y+z+2=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x+3y-z+2=0 \\ x+y+z-1=0 \end{cases}$;

в) $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{-6}=\dfrac{z+3}{9}$ і $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-7}{1}=\dfrac{z-5}{1}$.

3.4.10. Знайдіть кут між площиною $4x+4y-7z+1=0$ і прямою:

а) $\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x+y+3z+2=0 \end{cases}$;

б) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{-6}$;

в) $\begin{cases} x=2+4t \\ y=1+4t \\ z=-3-7t \end{cases}$.

3.4.11. Точка A лежить на прямій $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{1}$. Відстань від точки A до площини $x+y+z+3=0$ дорівнює $\sqrt{3}$. Знайдіть координати точки A.

3.4.12. Запишіть рівняння площин, які проходять через пряму $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z+2}{4}$, рівновіддалені від точок $A(1;2;5)$,

$B(3;0;-1)$.

3.4.13. Запишіть рівняння площин, які проходять через точку $A(1;0;4)$, рівновіддалену від трьох точок $B(2,1,6)$, $C(-2;3;2)$ і $D(8;1;0)$.

3.4.14. Запишіть рівняння площин, рівновіддалених від чотирьох точок $A(1;-1;3)$, $B(3;3;5)$, $C(1;7;3)$ та $D(5;1;5)$.

3.4.15. Доведіть, що дві прямі перетинаються. Запишіть рівняння бісектрис гострого та тупого кутів між ними. Прямі задано такими рівняннями:

а) $\begin{cases} x=4-4t \\ y=1+4t \\ z=-5+7t \end{cases}$ і $\begin{cases} x=-3+s \\ y=-1+2s \\ z=-4+2s \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x=4+t \\ y=1-t \\ z=5+4t \end{cases}$ і $\begin{cases} x=-3-3s \\ y=8+3s \\ z=1 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3t \\ z=11-6t \end{cases}$ і $\begin{cases} x=1+s \\ y=3+s \\ z=7-s \end{cases}$.

3.4.16. Задано дві прямі. Запишіть рівняння їхнього спільного перпендикуляра (тобто прямої, що перетинає обидві прямі під прямим кутом). Знайдіть точки перетину спільного перпендикуляра з прямими. Обчисліть відстань між прямими. Прямі задано рівняннями:

а) $\begin{cases} x=5+t \\ y=3-t \\ z=13+t \end{cases}$ і $\begin{cases} x=6+s \\ y=1+2s \\ z=10-s \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 2x+7y-13=0 \\ 3y-2z-1=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x+y-8=0 \\ 2x+=y-z=0 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x=6+t \\ y=1+2t \\ z=10-t \end{cases}$ і $\begin{cases} x=-4-7s \\ y=3+2s \\ z=4+3s \end{cases}$.

3.4.17. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1;3;2)$, паралельна до площини Oxy і утворює:

а) кут 45° з прямою $\begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases}$;

б) кут $\arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)$ з площиною $x-y=1$.

3.4.18. Запишіть рівняння площини, яка проходить через точку

$A(-1;2;1)$ паралельно до прямої $\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{-1}$ утворює кут 60° з прямою $\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$.

3.4.19. Точки $A(-1;-3;1)$, $B(5;3;8)$, $C(-1;-3;5)$, $D(2;1;-4)$ є вершинами тетраедра. Знайдіть:

а) довжину висоти тетраедра, яка опущена з вершини D на грань ABC;

б) довжину висоти основи ABC, яка опущена з вершини C на сторону AB;

в) відстань між ребрами AD і BC;

г) кут між ребрами AD і BC;

ґ) кут між ребром AD і гранню ABC.

3.4.20.* Запишіть рівняння бісекторіальної площини того двогранного кута між площинами $x - z - 5 = 0$ і $3x + 5y + 4z = 0$, всередині якого лежить точка $A(1;1;1)$.

3.4.21.* В кубі проведено спільний перпендикуляр до двох неперетинних діагоналей граней, що мають спільне ребро. В якому відношенні точки перетину перпендикуляра з діагоналями ділять ці діагоналі?

3.4.22. Нехай у системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$ відомо, що $|\vec{e}_1| = 1$, $|\vec{e}_2| = 1$, $|\vec{e}_3| = 2$, $\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_2) = \frac{\pi}{2}$, $\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_3) = \frac{\pi}{3}$, $\angle(\vec{e}_2,\vec{e}_3) = \frac{\pi}{3}$. Знайдіть відстань від точки $A(1;1;1)$ до площини $x + y + z + 1 = 0$.

3.4.23. Нехай у системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$ відомо, що $|\vec{e}_1| = 3$, $|\vec{e}_2| = \sqrt{2}$, $|\vec{e}_3| = 4$, $\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_2) = \frac{\pi}{4}$, $\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_3) = \frac{\pi}{3}$, $\angle(\vec{e}_2,\vec{e}_3) = \frac{\pi}{4}$. Знайдіть:

а) відстань від точки $A(1;1;1)$ до прямої $\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 5 \end{cases}$;

б) відстань від точки A до площини $x + y + z - 1 = 0$;

в) спільний перпендикуляр між прямими
$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3 - t \\ z = 13 + t \end{cases} \text{ та } \begin{cases} x = 6 + s \\ y = 1 + 2s \\ z = 10 - s \end{cases};$$

г) відстань між прямими $\frac{x-6}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-10}{-1}$ і $\frac{x+4}{-7} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}$.

Відповіді до розділу 3

3.1.1. $15x + 11y + 3z - 7 = 0$. **3.1.2.** $5x - 2y + 3z - 9 = 0$. **3.1.3.** $x + 2y + 5z - 20 = 0$. **3.1.4.** $x - y + 4z - 9 = 0$. **3.1.5.** $x + 4y - 3z - 2 = 0$. **3.1.6.** $x - 6y - 5z + 7 = 0$. **3.1.7.** а) $x - 2y + 3z - 6 = 0$; б) $x + 2y + z - 8 = 0$. **3.1.8.** а) $2x + y - 3z + 4 = 0$; б) $2x + 5y + 3z - 4 = 0$. **3.1.9.** $4x - y + 3z + 1 = 0$. **3.1.10.** $2x + 2y - z - 9 = 0$. **3.1.11.** *Вказівка:* Розгляньте довільну точку, яка належить площині і будь-які два вектори, які є паралельними до заданої площини. Відповідь до цієї задачі не єдина. **3.1.12.** *Вказівка:* Розгляньте довільну точку, яка належить площині і будь-які два вектори, які є паралельними до заданої площини. Відповідь до цієї задачі не єдина. **3.1.13.** $3x - 3y + 10z - 27 = 0$; $3x - 3y + 10z - \frac{27}{2} = 0$. **3.1.14.** $4x + y - 3z + 5 = 0$; $-x + 2y + 3z - 8 = 0$; $20x + 5y + 3z - 29 = 0$; $10x + y - 3z + 11 = 0$. **3.1.15.** а) Паралельна до координатної площини Oyz; б) паралельна до координатної площини Oxz; в) містить координатну вісь Oy; г) проходить через початок координат; ґ) паралельна до координатної площини Oxy. **3.1.16.** а) $2x + y - 1 = 0$; б) $y - 4z = 0$; в) $z = -7$; г) $2y + 3z - 5 = 0$; ґ) $3x - 2z = 0$; д) $y = 10$. **3.1.17.** а) $(-6;-4;-3)$; б) $u + v - 1 = 0$, $u = 0$, $v = 0$.

3.2.1. а) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}$; б) $\frac{x+1}{0} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-4}{5}$. **3.2.2.** а) $\frac{x-5}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-1}{0}$; б) $\frac{x-5}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{0}$; в) $\frac{x-5}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-1}{0}$; г) $\frac{x-5}{0} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-1}{1}$; ґ) $\frac{x-5}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1}$. **3.2.3.** $\vec{p} = (-5;1;3)$ і, наприклад, точка з прямої $A(-1;-2;0)$. **3.2.4.** $\vec{p} = (-9;13;53)$ і, наприклад, точка з прямої $A\left(0;-\frac{4}{9};\frac{1}{9}\right)$. **3.2.5.** $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{5}$. **3.2.6.** $\frac{x-6}{-4} = \frac{y+2}{7} = \frac{z-5}{0}$. **3.2.7.** $(0;0;1)$. **3.2.8.** $(1;0;0)$. **3.2.9.** а) Паралельна до координатної осі Ox; б) паралельна до координатної осі Oy; в) паралельна до бісектриси першого та третього координатних кутів площини Oxz; г) паралельна до бісектриси першого та третього координатних кутів площини Oxy та проходить через початок координат; ґ) утворює рівні кути з осями координат; д) паралельна до бісектриси першого та третього координатних кутів площини Oxy; е) паралельна до бісектриси другого та четвертого координатних кутів площини Oyz. **3.2.10.** $\left(-\frac{x_2z_1}{z_2-z_1}; \frac{y_1z_2}{z_2-z_1}; 0\right)$.

3.3.1. а) Перетинаються; б) паралельні; в) збігаються; г) перетинаються; ґ) перетинаються. **3.3.2.** а) $a \neq \pm 3$; б) $a = 3$; в) $a = -3$. **3.3.3.** а) $a = 3$; б) $a = -1$; в) $a = 1$; г) $a \neq \pm 1; 3$. **3.3.4.** а) Перетинаються в точці $(-3;0;4)$ і лежать в площині $2x - y + 6z - 18 = 0$; б) мимобіжні; в) паралельні і лежать в площині $5x - 22y + 19z + 9 = 0$; г) збігаються; ґ) перетинаються в точці $(-3;5;-5)$ і лежать в площині $9x + 10y - 7z - 58 = 0$. **3.3.5.** $(0;0;-2)$. **3.3.6.** Пряма паралельна до площини. **3.3.7.** а) Пряма належить площині; б) точка перетину $\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$; в) точка перетину $(53; 14; 18)$; г) пряма належить площині; ґ) пряма і площина паралельні. **3.3.8.** а) $a \neq \pm\frac{1}{2}$; б) $a = -\frac{1}{2}$; в) $a = \frac{1}{2}$. **3.3.9.** $39x + 27y - 11z - 120 = 0$. **3.3.10.** $\begin{cases} 4x + 3z = 0 \\ y + 2z + 9 = 0 \end{cases}$. **3.3.11.** $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$. **3.3.12.** $4x + y - 8z + 6 = 0$. **3.3.13.** а) $x + 7y - 6z + 6 = 0$; б) $10x + 2y - z + 5 = 0$. **3.3.14.** $3x + 11y + z + 5 = 0$. **3.3.15.** $7x + 3y + 2z - 11 = 0$. **3.3.16.** а) $\frac{x}{0} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-1}$; б) $\begin{cases} x = 0 \\ y - 4z + 3 = 0 \end{cases}$. **3.3.17.** а) $\frac{x+5}{-4} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+3}{2}$; б) $\begin{cases} 2x + y + 5z - 6 = 0 \\ x + 2y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$. **3.3.18.** а) $\begin{cases} x + y + z + 5 = 0 \\ 2x - 3y + z - 3 = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x - 2z = 0 \\ 2x - 3y + z - 3 = 0 \end{cases}$. **3.3.19.** а) $\begin{cases} 2x + 5y + 4z - 24 = 0 \\ 4x + y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 67x - 36y + 13z - 34 = 0 \\ 4x + y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$. **3.3.20.** а) $\begin{cases} 3x + 4y - 6z + 47 = 0 \\ 3x + 2y - 5z + 1 = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 8x + y - 16z - 7 = 0 \\ 3x + 2y - 5z + 1 = 0 \end{cases}$. **3.3.21.** $x - 3z + 4 = 0$; $2x - 4y + 5z + 9 = 0$; $6x + y + z + 2 = 0$; $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{3}$. **3.3.22.** а) $\begin{cases} 5x - 6y + 7z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 25x + 12y - 20z = 0 \end{cases}$. **3.3.23.** $\left(-\frac{29}{7}; \frac{12}{7}; -\frac{17}{7}\right)$. **3.3.24.** $\left(-\frac{6}{7}; \frac{2}{7}; \frac{4}{7}\right)$. **3.3.25.** $\frac{x-1}{4} = \frac{y-1{,}5}{17} = \frac{z-7}{10}$. **3.3.26.** $(2; 9; 6)$. **3.3.27.** $(3; -4; -6)$. **3.3.28.** $\begin{cases} 2x - 3y + 5z + 21 = 0 \\ x - y - z - 17 = 0 \end{cases}$. **3.3.29.** $5x - 10y - 3z - 3 = 0$. **3.3.30.** а) $\begin{cases} x - y - 2z + 2 = 0 \\ x - y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$; б) $(-3; -3; 1)$. **3.3.31.** а) $\frac{x-1}{168} = \frac{y-2}{38} = \frac{z-3}{-111}$; б) $\left(-\frac{57}{35}; -\frac{58}{5}; \frac{41}{7}\right)$; в) $\left(-\frac{53}{25}; -\frac{22}{25}; \frac{147}{25}\right)$.

3.4.1. а) $\arccos\frac{7}{3\sqrt{26}}$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{\pi}{3}$; г) $\arccos\frac{14}{\sqrt{570}}$. **3.4.2.** а) $\frac{3}{2}$; б) 0. **3.4.3.** 3. **3.4.4.** 3. **3.4.5.** а) 4; б) $\frac{32}{\sqrt{26}}$. **3.4.6.** $3x - 6y - 2z + 21 = 0$; $3x - 6y - 2z - 7 = 0$. **3.4.7.** $x + 2y + 2z - 9 = 0$; $y - 2 = 0$. *Вказівка:* Зручно користуватись нормальним рівнянням площини. **3.4.8.** $M(0; 0; 3)$; $M_1\left(0; 0; -\frac{5}{2}\right)$. **3.4.9.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{5}$; в) $\arccos\frac{11\sqrt{606}}{606}$. **3.4.10.** а) $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}$; б) $\arcsin\frac{62}{63}$; в) $\frac{\pi}{2}$. **3.4.11.** $(1; 0; -1)$ або $(-1; -3; -2)$. **3.4.12.** $11x - 13y + 8z + 18 = 0$; $20x - 8y - 5z - 22 = 0$. **3.4.13.** $x + 4y + z - 5 = 0$; $x - 10y - 6z + 23 = 0$; $2x + y + 2z - 10 = 0$; $2x + y + 9z - 38 = 0$. **3.4.14.** $5x + y - 7z + 13 = 0$; $3x - y - 5z + 15 = 0$; $z - 4 = 0$; $x + y + z - 7 = 0$; $x - z + 1 = 0$; $x + y - 3z + 5 = 0$; $x - 2z + 6 = 0$. **3.4.15.** а) $\frac{x}{7} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-2}{1}$, $\frac{x}{1} = \frac{y-5}{-10} = \frac{z-2}{-13}$; б) $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-2}$, $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1}$; в) $\frac{x-3}{7-2\sqrt{3}} = \frac{y-5}{7-3\sqrt{3}} = \frac{z-5}{-7+6\sqrt{3}}$,

$\frac{x-3}{7+2\sqrt{3}} = \frac{y-5}{7+3\sqrt{3}} = \frac{z-5}{-7-6\sqrt{3}}$. **3.4.16.** а) $\begin{cases} 5x + 4y - z - 24 = 0 \\ 4x - y + 2z - 43 = 0 \end{cases}$, $(5; 3; 13)$, $(6; 1; 10)$, $\sqrt{14}$; б) $\begin{cases} 2x - 5y + 8z - 9 = 0 \\ x - z + 8 = 0 \end{cases}$, $(-4; 3; 4)$, $(-1; 9; 7)$, $3\sqrt{6}$; в) $\begin{cases} 3x - 2y - z - 6 = 0 \\ 5x + 34y - 11z - 38 = 0 \end{cases}$, $(7; 3; 9)$, $(3; 1; 1)$, $2\sqrt{21}$. **3.4.17.** а) $\begin{cases} y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$ або $\begin{cases} x = 1 \\ z = 2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$ або $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ z = 2 \end{cases}$. **3.4.18.** $2x + y + z - 1 = 0$, $14x + 13y - 11z - 1 = 0$. **3.4.19.** а) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{48}{11\sqrt{2}}$; в) $\frac{8}{3\sqrt{41}}$; г) $\arccos\frac{3\sqrt{2}}{10}$; ґ) $\arcsin\frac{1}{10}$. **3.4.20.** $8x + 5 - z - 25 = 0$. **3.4.21.** 2. **3.4.22.** $2\sqrt{2}$. **3.4.23.** а) $6\sqrt{2}$; б) $\frac{12}{57}\sqrt{182}$. **3.3.32.** Це площина, яка паралельна до заданих прямих і містить точку, яка ділить у цьому відношенні один з зазначених відрізків.

Розділ 4
Лінії другого порядку

У цьому розділі, якщо не зазначено іншого, вважаємо, що задано прямокутну систему координат.

4.1. Коло

Колом називається множина точок площини, відстань від яких до фіксованої точки є величиною сталою. Цю фіксовану точку називають *центром* кола, а відстань — *радіусом* кола.

Задача 4.1. Якщо центр кола розташований у точці $(x_0; y_0)$ і радіус кола r, то рівняння кола набуває вигляду

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \tag{4.1}$$

Розв'язання. Нехай $M(x; y)$ довільна точка, яка належить колу, тоді відстань від неї до центра кола така: $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. За означенням кола ця відстань дорівнює r, тому

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

З іншого боку, якщо координати $(x; y)$ деякої точки M задовольняють рівняння (4.1), то відстань від цієї точки до точки $(x_0; y_0)$ дорівнює r, а це означає, що точка M належить колу.

Приклад 4.1. Запишіть рівняння кола, яке:

а) має центр в точці $(3; 2)$ і радіус $r = 4$;

б) дотикається до осей координат в точках $(6; 0)$ і $(0; -6)$.

Розв'язання. а) Згідно з (4.1) коло матиме рівняння

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 16.$$

б) Осі Ox та Oy — дотичні до шуканого кола, а прямі $x = 6$ та $y = -6$ перпендикулярні до цих дотичних. Точка перетину $O(6; -6)$ цих перпендикулярних прямих є центром кола, а відстань від точки O до осей координат — радіус кола. Тому рівняння кола набуде вигляду

$$(x - 6)^2 + (y + 6)^2 = 36.$$

Задача 4.2. Рівняння дотичної до кола в точці $(x_1; y_1)$ визначається рівнянням

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = r^2. \tag{4.2}$$

Розв'язання. Розглянемо дотичні до кола $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, які проведено в точках, що належать верхній $(y > 0)$ частині кола. Ця частина кола задається рівнянням $y = y_0 + \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}$. В точці дотику $(x_1; y_1)$ рівняння дотичної набуде вигляду

$$y - y_1 = y'(x_1)(x - x_1) = -\frac{x_1}{\sqrt{r^2 - (x_1 - x_0)^2}}(x - x_1).$$

Зробивши елементарні перетворення цього рівняння і врахувавши, що точка дотику належить колу, отримуємо

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = r^2.$$

Аналогічне співвідношення отримуємо, коли точка дотику $(x_1; y_1)$ належить нижній $(y < 0)$ частині кола

$$y = y_0 - \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}.$$

При $y = 0$ отримуємо токи перетину кола з віссю абсцис, дотичними в цих точках будуть прямі $x = \pm r$. Їхні рівняння можна легко отримати, якщо взяти праву і ліву частини кола, тобто розглядати рівняння $x = x_0 \pm \sqrt{r^2 - (y - y_0)^2}$.

Нехай коло задане рівнянням $x^2 + y^2 = r^2$. Виберемо довільну точку $M(x; y)$ на колі. Відстань від цієї точки M до центра кола $O(0; 0)$ дорівнює r. Позначимо через t кут, який утворює промінь OM з додатним напрямом осі абсцис. Очевидно, що

$$\cos t = \frac{x}{r}, \ \sin t = \frac{y}{r}.$$

Звідси

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}. \tag{4.3}$$

Нехай M точка з координатами $(r\cos t; r\sin t)$. Оскільки

$$(r\cos t)^2 + (r\sin t)^2 = r^2,$$

то точка M належить колу. Рівності (4.3) називаються *параметричним рівнянням* кола.

Вправи

4.1.1. Запишіть рівняння кола, яке:

а) має центр у точці $(2; -5)$ і радіус $r = 4$;

б) має центр у точці $(-3; 4)$ і проходить через початок координат;

в) має центр у точці $(0; 4)$ і проходить через точку $(5; -8)$.

4.1.2. Запишіть рівняння кола, яке:

а) має центр у точці $(-1; 4)$ і радіус $r = 3$;

б) має центр у точці $(6; 8)$ і проходить через початок координат;

в) має центр у точці $(4; 0)$ і проходить через точку $(-8; 5)$.

4.1.3. Запишіть рівняння кола, якщо відомо координати кінців одного з діаметрів $A(1; 4)$ та $B(-3; 2)$.

4.1.4. На осі абсцис знайдіть центр кола, яке проходить через точки $A(2; 3)$ і $B(5; 2)$. Напишіть рівняння цього кола.

4.1.5. Напишіть рівняння кола, знаючи, що його центр лежить на прямій $x - y + 2 = 0$ і коло проходить через точки $A(3; 0)$ та $B(-1; 2)$.

4.1.6. Визначте центр та радіус кола:

а) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$;

б) $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 1 = 0$;

в) $x^2 + y^2 - 4x = 0$;

г) $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$.

4.1.7. Визначте точки перетину кола з осями координат:

а) $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$;

б) $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$;

в) $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$;

г) $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 1$.

4.1.8. Запишіть рівняння кола, якщо воно дотикається до осі абсцис у початку координат і перетинає вісь ординат у точці $(0; 4)$.

4.1.9. Запишіть рівняння кола, якщо воно дотикається до осі ординат у точці $(0; -3)$ і має радіус $r = 2$.

4.1.10. Знайдіть центр кола, якщо це коло відтинає на осі абсцис хорду довжиною 28, проходить через точку $(0; 8)$ і має радіус $r = 50$.

4.1.11. Запишіть рівняння дотичної до кола $x^2 + y^2 = 5$, що проходить через точку $(1; -2)$.

4.1.12. Запишіть рівняння дотичної до кола $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$, що проходить через точку $(5; 5)$.

4.1.13. Запишіть рівняння дотичної до кола $x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0$, що проходить через точку $(0; 3)$.

4.1.14. Запишіть рівняння дотичної до кола $x^2+y^2-10x-4y+25 = 0$, що проходить через точку початок координат.

4.1.15. Запишіть рівняння тих дотичних до кола $x^2 + y^2 = 5$, які паралельні до прямої $2x - y + 1 = 0$.

4.1.16. Визначте кут, під яким видно коло $x^2+y^2 = 16$ з точки $(8; 0)$.

4.1.17. Знайдіть геометричне місце точок площини, з яких коло $x^2 + y^2 = r^2$ видно під прямим кутом.

4.1.18.* Через точку $A(2; 1)$ проходить коло, яке дотикається до кола $x^2+y^2-8x-4y+11 = 0$ зсередини. Запишіть рівняння внутрішнього кола, якщо його радіус $r = 1$.

4.1.19. Запишіть параметричне рівняння кола $x^2 + y^2 = 49$.

4.1.20. Запишіть параметричне рівняння кола $(x-1)^2+(y+4)^2 = 4$.

4.2. Еліпс. Поняття еліпса. Фокальна властивість еліпса. Канонічна система координат і канонічне рівняння еліпса

Еліпсом називається множина точок площини, сума відстаней від кожної з яких до двох фіксованих точок цієї площини є величиною сталою і більшою, ніж відстань між цими фіксованими точками. Ці фіксовані точки в означенні еліпса називаються *фокусами* еліпса. Нехай M довільна точка еліпса, а F_1, F_2 — його фокуси. Відстань між фокусами називається *фокальною відстанню*. Фокальну відстань надалі позначатимемо через $2c$, тобто $2c = |F_1F_2|$. За означенням еліпса $|MF_1| + |MF_2|$ — величина стала, яку позначатимемо через $2a$. Отже, $2a = |MF_1| + |MF_2| > |F_1F_2| = 2c$, тобто $a > c$.

Якщо взяти прямокутну систему координат Oxy так, щоб її початок збігався з серединою відрізка F_1F_2, а вісь Ox проходила через фокуси F_1, F_2, то в цій системі координат еліпс задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{4.4}$$

де $b^2 = a^2 - c^2$. Це рівняння називається *канонічним рівнянням* еліпса, а відповідно, система координат Oxy називається *канонічною системою* координат для еліпса. Пряма, яка проходить через фокуси еліпса, тобто вісь Ox канонічної системи координат називається *великою віссю* еліпса, а пряма, яка перпендикулярна до великої осі і проходить через середину відрізка F_1F_2 (тобто вісь Oy канонічної системи координат) — *малою віссю* еліпса. Параметр a називається *великою піввіссю*, а параметр b — *малою піввіссю*. Очевидно, що фокуси еліпса в канонічній системі координат мають координати $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$.

Нехай M довільна точка еліпса, F_1, F_2 — його фокуси, тоді відрізки F_1M і F_2M називаються *фокальними радіусами* точки M. Якщо еліпс задано в канонічній системі координат рівнянням $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ і його точка M_0 має координати $(x_0;y_0)$, то фокальні радіуси цієї точки обчислюють за формулами

$$r_1 = F_1M_0 = a - \frac{c}{a}\,x_0 \quad \text{і} \quad r_2 = F_2M_0 = a + \frac{c}{a}\,x_0.$$

Ексцентриситетом еліпса називається відношення $e = \dfrac{c}{a}$. Очевидно, що для еліпса $e < 1$. *Директрисами* еліпса називаються прямі, які паралельні до його малої осі та розміщені на відстані $\dfrac{a}{e}$ по обидва боки від неї. Очевидно, в канонічній системі координат директриси еліпса мають рівняння $x = \pm\dfrac{a}{e}$.

Приклад 4.2. Відстані від одного з фокусів еліпса до кінців його більшої осі дорівнюють 7 і 1. Запишіть канонічне рівняння цього еліпса.

Розв'язання. Нехай $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ канонічне рівняння еліпса в канонічній системі координат, $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ його фокуси і

$A(-a;0)$, $B(a;0)$ кінці його великої осі. За умовою задачі

$$|AF_2| = 7 \ \text{ і } \ |BF_2| = 1 \ \text{ або } \ \sqrt{(a+c)^2} = 7 \ \text{ і } \ \sqrt{(a-c)^2} = 1.$$

Розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} a+c=7 \\ a-c=1 \end{cases}$, отримуємо $a = 4$, $c = 3$. Тоді $b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 9 = 7$. Отже, шукане рівняння еліпса набуває вигляду

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1.$$

Приклад 4.3. Запишіть рівняння еліпса, якщо відомо його фокуси $F_1(-4;0)$, $F_2(2;0)$ і одну із директрис $d_1:\ x = \frac{22}{3}$.

Розв'язання. Знайдемо канонічну систему координат $O'x'y'$ для заданого еліпса. Оскільки $\overrightarrow{F_1F_2} \parallel \vec{i}$, то $\vec{i}\,' = \vec{i}$ і, відповідно, $\vec{j}\,' = \vec{j}$ (див. рис. 21).

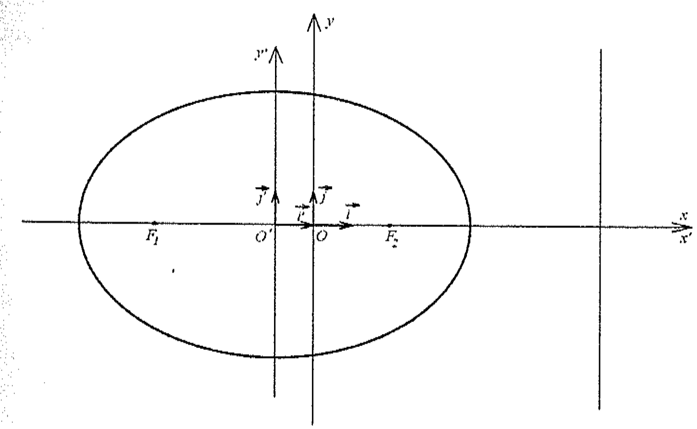


Рис. 21

Початок канонічної системи координат O' є серединою відрізка F_1F_2, а отже, має координати $(-1;0)$. Запишемо формули переходу від системи координат Oxy до системи координат $O'x'y'$:

$$\begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' \end{cases}. \tag{4.5}$$

У системі координат $O'x'y'$ рівняння заданої директриси набуватиме вигляду $x' - 1 = \dfrac{22}{3}$ або $x' = \dfrac{25}{3}$. Звідси $\dfrac{a}{e} = \dfrac{a^2}{c} = \dfrac{25}{3}$. Оскільки $2c = |F_1F_2| = 6$, то $c = 3$ і, відповідно, $a^2 = 25$, $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$. Запишемо канонічне рівняння еліпса в системі координат $O'x'y'$

$$\frac{x'^2}{25} + \frac{y'^2}{16} = 1.$$

Використовуючи формули переходу (4.5), отримаємо рівняння еліпса в системі координат Oxy

$$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Приклад 4.4. Запишіть рівняння еліпса, якщо відомо його лівий фокус $F(-2;4)$, ліву директрису $x = -11$ і $c = 3$.
Розв'язання. Знайдемо канонічну систему координат $Cx'y'$ для заданого еліпса. Центр еліпса C розташований на прямій, перпендикулярній до директриси $x = -11$, тому $\overrightarrow{F_1C} \parallel \vec{i}$ і $\vec{i}\,' = \vec{i}$ та, відповідно, $\vec{j}\,' = \vec{j}$ (див. рис. 22).

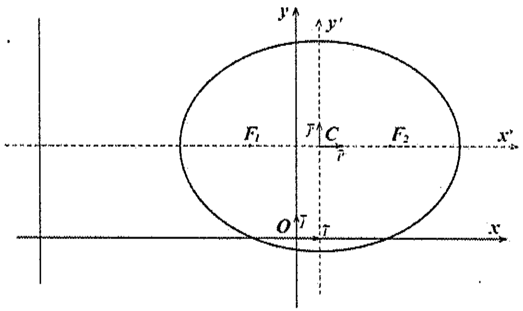


Рис. 22

Точка C розташована на горизонтальній прямій $y = 4$ на відстані $c = 3$ від лівого фокуса, тому її координати $(1;4)$. Запишемо формули переходу від системи координат Oxy до системи координат $Cx'y'$

$$\begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' + 4 \end{cases}. \tag{4.6}$$

В еліпсі відстань від фокуса до відповідної директриси чисельно дорівнює $\dfrac{a}{e} - c$, тому $\dfrac{a}{e} - c = |-11 - (-2)| = 9$. Підставивши $e = \dfrac{c}{a}$, отримуємо $\dfrac{a^2}{c} - c = 9$. Оскільки $c = 3$, то з попереднього рівняння $a^2 = 36$, і, відповідно, $b^2 = 27$. Канонічне рівняння еліпса в системі координат $Cx'y'$

$$\frac{x'^2}{36} + \frac{y'^2}{27} = 1.$$

Використовуючи формули переходу (4.6), одержуємо рівняння еліпса в системі координат Oxy

$$\frac{(x-1)^2}{36} + \frac{(y-4)^2}{27} = 1.$$

Приклад 4.5. Запишіть рівняння еліпса, якщо відомо його фокуси $F_1(-1;0)$, $F_2(5;2)$ і одну із директрис $3x + y + 6 = 0$.
Розв'язання. *Перший спосіб.* Через l позначимо задану директрису, тоді

$$d(F_1, l) = \frac{|3\cdot(-1) + 0 + 6|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}},$$

$$d(F_2, l) = \frac{|3\cdot 5 + 2 + 6|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{23}{\sqrt{10}}.$$

Оскільки $d(F_1, l) < d(F_2, l)$, то фокус F_1 і директриса l лежать по один бік стосовно центра. Тому $d(F_1, l) = \dfrac{a^2}{c} - c = \dfrac{b^2}{c} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$. Відстань між фокусами $|F_1F_2| = 2c = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$. Отже, $c = \sqrt{10}$ і $b^2 = 3$, $a^2 = b^2 + c^2 = 13$. За фокальною властивістю еліпса для довільної точки $M(x;y)$ справджується рівність $|MF_1| + |MF_2| = 2a$, тобто

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-2)^2} = 2\sqrt{13}.$$

Зробивши перетворення цього рівняння, отримуємо

$$4x^2 - 6xy + 12y^2 - 10x - 12y - 23 = 0.$$

Другий спосіб. Знайдемо канонічну систему координат $O'x'y'$ для заданого еліпса. Оскільки $\vec{i}\,' = \dfrac{\overrightarrow{F_1F_2}}{|\overrightarrow{F_1F_2}|} = \dfrac{(6;2)}{\sqrt{40}} = \left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}; \dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)$, то $\vec{j}\,' = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}; \dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$ (див. рис. 23).

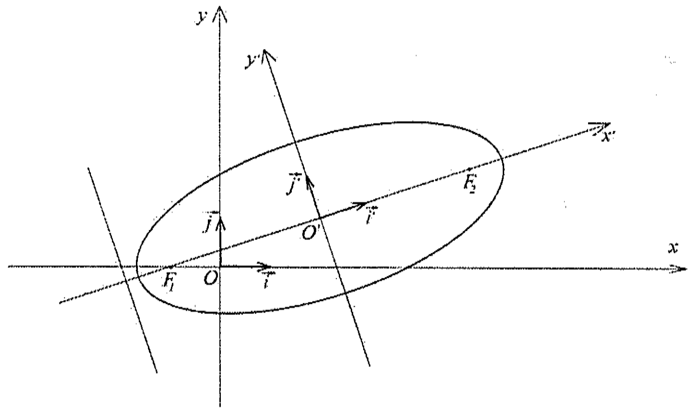


Рис. 23

Початок канонічної системи координат O' є серединою відрізка F_1F_2, а отже, точка O' має координати $(2;1)$ в системі координат Oxy.

Запишемо формули переходу від системи координат Oxy до системи координат $O'x'y'$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ або}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{\sqrt{10}}x' - \dfrac{1}{\sqrt{10}}y' + 2 \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}x' + \dfrac{3}{\sqrt{10}}y' + 1 \end{cases}. \tag{4.7}$$

В системі координат $O'x'y'$ рівняння заданої директриси набуватиме вигляду

$$3\left(\frac{3}{\sqrt{10}}x' - \frac{1}{\sqrt{10}}y' + 2\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{10}}x' + \frac{3}{\sqrt{10}}y' + 1\right) + 6 = 0.$$

Звідси $x' = -\dfrac{13}{\sqrt{10}}$, отже, $\dfrac{a}{e} = \dfrac{a^2}{c} = \dfrac{13}{\sqrt{10}}$. Оскільки $2c = |F_1F_2| = 2\sqrt{10}$, то $c = \sqrt{10}$ і, відповідно, $a^2 = 13, b^2 = a^2 - c^2 = 13 - 10 = 3$. Запишемо канонічне рівняння еліпса в системі координат $O'x'y'$

$$\frac{x'^2}{13} + \frac{y'^2}{3} = 1.$$

Тепер запишемо формули переходу від системи координат $O'x'y'$ до системи координат Oxy

$$\begin{cases} x' = \dfrac{3}{\sqrt{10}}x + \dfrac{1}{\sqrt{10}}y - \dfrac{7}{\sqrt{10}} \\ y' = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}x + \dfrac{3}{\sqrt{10}}y - \dfrac{1}{\sqrt{10}} \end{cases}. \tag{4.8}$$

Використовуючи формули переходу (4.8), одержуємо рівняння еліпса в системі координат Oxy

$$\frac{\left(\frac{3}{\sqrt{10}}x + \frac{1}{\sqrt{10}}y - \frac{7}{\sqrt{10}}\right)^2}{13} + \frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}x + \frac{3}{\sqrt{10}}y - \frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2}{3} = 1.$$

Зробивши перетворення цього рівняння, отримуємо

$$4x^2 - 6xy + 12y^2 - 10x - 12y - 23 = 0.$$

Приклад 4.6. Прямі $x - 2y + 1 = 0$ і $2x + y + 2 = 0$ є, відповідно, великою та малою осями еліпса. Напишіть рівняння еліпса, якщо один з його фокусів розташований у точці $F(1;1)$, а велика піввісь дорівнює 4.

Розв'язання. *Перший спосіб.* Зауважимо, що осі еліпса перетинаються в центрі еліпса, тому, розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases}$, отримуємо координати $O'(-1;0)$ центра еліпса. Визначимо координати лівого фокуса F_1 заданого еліпса

$\overrightarrow{F_1O'} = \overrightarrow{O'F} = (2;1)$, звідси $F_1(-3;-1)$. За фокальною властивістю еліпса для довільної точки $M(x;y)$ еліпса справеджується рівність $|\overrightarrow{MF_1}| + |\overrightarrow{MF}| = 2a$, отже,

$$\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2} + \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = 8.$$

Виконавши перетворення цього рівняння, одержимо

$$12x^2 - 4xy + 15y^2 + 24x - 4y - 164 = 0.$$

Другий спосіб. Точка $O'(-1;0)$ перетину осей еліпса є початком канонічної системи координат $O'x'y'$ цього еліпса.

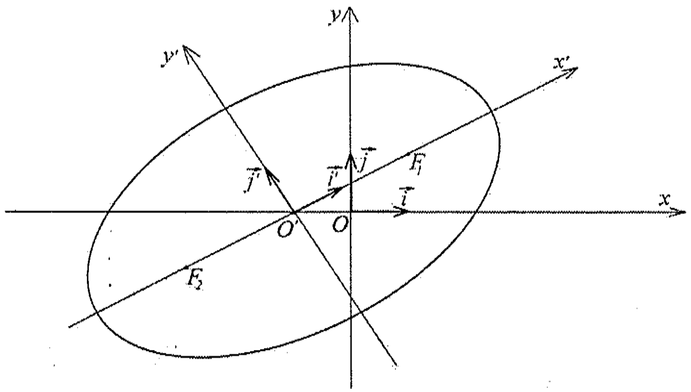


Рис. 24

Параметр $c = |\overrightarrow{O'F}| = \sqrt{5}$, за умовою $a = 4$, тому $b^2 = a^2 - c^2 = 1 - 5 = 11$. Отже, в системі координат $O'x'y'$ канонічне рівняння еліпса таке: $\dfrac{x'^2}{16} + \dfrac{y'^2}{11} = 1$. Запишемо формули переходу від системи координат Oxy до системи координат $O'x'y'$. Базовий вектор осі абсцис $\vec{i}\,'$ визначаємо як $\vec{i}\,' = \dfrac{\overrightarrow{O'F}}{|\overrightarrow{O'F}|} = \left(\dfrac{2}{\sqrt5}; \dfrac{1}{\sqrt5}\right)$, а базовий вектор осі ординат $\vec{j}\,' = \left(-\dfrac{1}{\sqrt5}; \dfrac{2}{\sqrt5}\right)$ як перпендикулярний вектор до вектора $\vec{i}\,'$ (див. рис. 24).

Тоді

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & -\frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ або}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt5}x' - \dfrac{1}{\sqrt5}y' - 1 \\ y = \dfrac{1}{\sqrt5}x' + \dfrac{2}{\sqrt5}y' \end{cases}. \tag{4.9}$$

Формули переходу від системи координат $O'x'y'$ до системи координат Oxy набувають вигляду

$$\begin{cases} x' = \dfrac{2}{\sqrt5}x + \dfrac{1}{\sqrt5}y + \dfrac{2}{\sqrt5} \\ y' = -\dfrac{1}{\sqrt5}x + \dfrac{2}{\sqrt5}y - \dfrac{1}{\sqrt5} \end{cases}. \tag{4.10}$$

Використовуючи формули переходу (4.10), одержуємо рівняння еліпса в системі координат Oxy :

$$\frac{\left(\frac{2}{\sqrt5}x + \frac{1}{\sqrt5}y + \frac{2}{\sqrt5}\right)^2}{16} + \frac{\left(-\frac{1}{\sqrt5}x + \frac{2}{\sqrt5}y - \frac{1}{\sqrt5}\right)^2}{11} = 1.$$

Виконавши елементарні перетворення попереднього рівняння, одержимо

$$12x^2 - 4xy + 15y^2 + 24x - 4y - 164 = 0.$$

Вправи

4.2.1. Знайдіть довжини півосей, ексцентриситет, координати фокусів і рівняння директрис еліпса:

а) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1$; б) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

4.2.2. Запишіть канонічне рівняння еліпса, якщо сума його різних півосей дорівнює 8 і відстань між його фокусами теж 8.

4.2.3. Запишіть канонічне рівняння еліпса, якщо сума його різних півосей дорівнює 7, а відстань між його фокусами — 4.

4.2.4. Запишіть канонічне рівняння еліпса, якщо довжини його півосей відносяться як 3 : 2 і точка $A(0;1)$ належить еліпсу.

4.2.5. Запишіть канонічне рівняння еліпса, якщо довжини його півосей відносяться як 4 : 3 і точка $A(-1;1)$ належить еліпсу.

4.2.6. Запишіть канонічне рівняння еліпса, якщо відстань між його фокусами дорівнює 12 і точка $A(7;0)$ належить еліпсу.

4.2.7. Запишіть канонічне рівняння еліпса, якщо відстань між його фокусами дорівнює 4 і точка $A(-3;0)$ належить еліпсу.

4.2.8. Запишіть рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис, симетрично стосовно початку координат, якщо точки $M_1(4;-\sqrt{3}), M_2(2\sqrt{2};3)$ належать еліпсу.

4.2.9. Запишіть рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис, симетрично стосовно початку координат, якщо точки $M_1(0;2), M_2(-\frac{3}{\sqrt{2}};\sqrt{2})$ належать еліпсу.

4.2.10. Запишіть канонічне рівняння еліпса, якщо відстань між його директрисами дорівнює 8, а відстань від директриси до найближчої вершини — 1.

4.2.11. Запишіть канонічне рівняння еліпса, якщо відстань між його директрисами дорівнює 18, а відстань від директриси до найближчої вершини — 3.

4.2.12. Запишіть канонічне рівняння еліпса, якщо трикутник з вершинами у фокусах і в кінці малої осі рівносторонній, а діаметр кола, яке проходить через центр і дві вершини еліпса дорівнює 7.

4.2.13. Запишіть канонічне рівняння еліпса, якщо директрисами є прямі $x = \pm 4$, а чотирикутник з вершинами у фокусах і в кінцях малої осі — квадрат.

4.2.14. На еліпсі $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ знайдіть точку, правий фокальний радіус якої в 4 рази більший за лівий фокальний радіус.

4.2.15. На еліпсі $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ знайдіть точку, для якої добуток фокальних радіусів дорівнює квадрату малої півосі.

4.2.16. Запишіть рівняння еліпса, осі якого паралельні до осей координат, та еліпс дотикається осей Ox та Oy, відповідно, в точках $(5;0)$ і $(0;3)$. Знайдіть координати фокусів і рівняння директрис цього еліпса.

4.2.17. Запишіть рівняння еліпса, який дотикається до осі Ox в точці $(7;0)$ та до осі Oy в точці $(0;4)$. Осі еліпса паралельні до осей координат. Знайдіть координати фокусів і рівняння директрис цього еліпса.

4.2.18. Запишіть рівняння еліпса, який перетинає вісь Ox в точках $(1;0)$ та $(9;0)$, дотикається до осі Oy в точці $(0;2)$ й осі цього еліпса паралельні до осей координат.

4.2.19. Запишіть рівняння еліпса, який перетинає вісь Ox в точках $(3;0)$ та $(7;0)$, дотикається до осі Oy в точці $(0;3)$ і осі цього еліпса паралельні до осей координат.

4.2.20. Запишіть рівняння еліпса, дві вершини якого розташовані в точках $(0;6)$ та $(0;-2)$ і цей еліпс відтинає на осі Ox хорду довжиною 6. Осі еліпса паралельні до осей координат.

4.2.21. Нехай $F_1(1;3), F_2(-5,3)$ фокуси еліпса і відстань між його директрисами дорівнює 12. Запишіть рівняння еліпса.

4.2.22. Нехай $F_1(-1;5), F_2(3,5)$ фокуси еліпса і відстань між його директрисами дорівнює 8. Запишіть рівняння еліпса.

4.2.23. Запишіть рівняння еліпса з вершиною в точці $O(-2;3)$, фокусом у точці $F(1;3)$, якщо сума його різних півосей дорівнює 5.

4.2.24. Запишіть рівняння еліпса з вершиною в точці $O(1;-2)$, фокусом у точці $F(-1;-2)$, якщо сума його різних півосей дорівнює 6.

4.2.25. Запишіть рівняння еліпса з фокусами $F_1(-5;4)$, $F_2(-1;4)$ і директрисою $x = 0$.

4.2.26. Запишіть рівняння еліпса з фокусами $F_1(0;0)$, $F_2(6;0)$ і директрисою $x = 7$.

4.2.27. Визначте рівняння еліпса, якщо точка $F_1(0;1)$ — один із його фокусів, точка $A(0;3)$ — кінець великої осі і ексцентриситет еліпса $e = 0,5$.

4.2.28. Визначте рівняння еліпса, якщо точка $F_1(2;0)$ — один із його фокусів, точка $A(14;0)$ — кінець великої осі і ексцентриситет еліпса $e = 0,25$.

4.2.29. Запишіть рівняння еліпса з фокусами в точках $F_1(-3;-4)$, $F_2(3;4)$ і великою піввіссю $a = 7$.

4.2.30. Запишіть рівняння еліпса з фокусами в точках $F_1(0;4)$, $F_2(4;0)$ і великою піввіссю $a = 6$.

4.2.31. Запишіть рівняння еліпса, якщо відомі координати правого фокуса $F(3;-1)$, рівняння правої директриси $x = 10,8$ та $a = 8$.

4.2.32. Запишіть рівняння еліпса, якщо відомі координати лівого фокуса $F(1;-4)$, рівняння правої директриси $x=14$ та $b=\sqrt{20}$.

4.2.33. Запишіть рівняння еліпса, описаного навколо рівностороннього трикутника, дві вершини якого розташовані в точках $(3;0)$ і $(-3;0)$, що збігаються з вершинами еліпса, і лежать на одній осі.

4.2.34. Запишіть рівняння еліпса, описаного навколо рівностороннього трикутника, дві вершини якого розташовані в точках $(0;4)$ і $(0;-4)$, що збігаються з вершинами еліпса, і лежать на одній осі.

4.2.35. Обчисліть ексцентриситет еліпса, якщо малу вісь еліпса видно з фокуса під прямим кутом.

4.2.36. Обчисліть ексцентриситет еліпса, якщо відстань між фокусами така сама як і відстань між вершинами на різних осях еліпса.

4.2.37. Обчисліть ексцентриситет еліпса, якщо відстань між директрисами в чотири рази перевищує відстань між фокусами.

4.2.38. Запишіть рівняння еліпса, для якого прямі $x-3y+1=0$ і $3x+y=0$ є, відповідно, велика і мала осі, а довжини півосей дорівнюють 5 і 4.

4.2.39. Запишіть рівняння еліпса, для якого прямі $2x-5y=0$ і $5x+2y+1=0$ є, відповідно, велика і мала осі, а довжини півосей дорівнюють 3 і 2.

4.2.40. Запишіть рівняння еліпса, фокуси якого мають координати $(1;0),(0;1)$ і велика піввісь дорівнює 2.

4.2.41. Запишіть рівняння еліпса, фокуси якого мають координати $(0;2),(-2;0)$ і мала піввісь дорівнює 2.

4.2.42. В еліпс $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{24}=1$ вписано прямокутник, дві протилежні сторони якого проходять через фокуси. Обчисліть площу цього прямокутника.

4.2.43.* В еліпс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ вписано квадрат. Обчисліть довжину сторони цього квадрата.

4.2.44.* В афінній системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$, де $|\vec{e}_1|=2$, $|\vec{e}_2|=3$, $\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=\dfrac{2\pi}{3}$ запишіть рівняння еліпса, якщо його фокуси розташовані в точках $F_1(-3;0)$, $F_2(3;0)$, а велика піввісь $a=4$.

4.3. Гіпербола. Поняття гіперболи. Фокальна властивість гіперболи. Канонічна система координат і канонічне рівняння гіперболи

Гіперболою називається множина точок площини, модуль різниці відстаней від кожної з яких до двох фіксованих точок цієї площини, що називаються фокусами, є величиною сталою. Нехай M довільна точка гіперболи, а F_1, F_2 — його фокуси. Відстань між фокусами $|F_1F_2|=2c$ називається *фокальною відстанню*. За означенням гіперболи $||MF_1|-|MF_2||$ — величина стала, яку позначатимемо через $2a$. Очевидно, $2a=||MF_1|-|MF_2||<|F_1F_2|$, тобто $a<c$.

Виберемо прямокутну систему координат Oxy так, щоб її початок збігався з серединою відрізка F_1F_2, а вісь Ox проходила через фокуси F_1, F_2. Тоді $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$. Так вибрана система координат називається *канонічною системою* координат для гіперболи, а гіпербола в цій системі координат має рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{4.11}$$

де $b^2=c^2-a^2$. Це рівняння називається *канонічним рівнянням* гіперболи. Пряма, яка проходить через фокуси гіперболи, тобто вісь Ox канонічної системи координат називається *дійсною віссю* гіперболи, а пряма, яка перпендикулярна до дійсної осі і проходить через середину відрізка F_1F_2 (тобто вісь Oy канонічної системи координат), називається *уявною віссю* гіперболи. Параметр a називається *дійсною піввіссю* гіперболи, а параметр b її *уявною піввіссю*.

Нехай M довільна точка гіперболи, F_1, F_2 — її фокуси, тоді відрізки F_1M і F_2M називаються *фокальними радіусами* точки M. Якщо гіперболу задано в канонічній системі координат рівнянням $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ і її точка M_0 має координати $(x_0;y_0)$, то фокальні радіуси цієї точки обчислюють за формулами

$$r_1=F_1M_0=\frac{c}{a}\,x_0-a \quad \text{і} \quad r_2=F_2M_0=\frac{c}{a}\,x_0+a.$$

Ексцентриситетом гіперболи називається число $e=\dfrac{c}{a}$. Оскільки $a<c$, то ексцентриситет гіперболи завжди більший за 1. *Директрисами* гіперболи називаються прямі, які паралельні до її уявної

осі та розміщені на відстані $\dfrac{a}{e}$ по обидва боки від неї. Очевидно, в канонічній системі координат директриси мають рівняння $x = \pm\dfrac{a}{e}$.

Приклад 4.7. Запишіть канонічне рівняння гіперболи, довжина уявної півосі якої дорівнює 3, а вершина ділить відстань між фокусами у відношенні 2 : 1.

Розв'язання. Вершина гіперболи ділить відрізок F_1F_2 на частини, які мають довжини $c+a$ і $c-a$. Довжини цих частин відносяться як 2 : 1, тому $\dfrac{c+a}{c-a} = \dfrac{2}{1}$, звідки $c = 3a$. З іншого боку, $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+9}$. Отримали, що $3a = \sqrt{a^2+9}$, тобто $a^2 = \dfrac{9}{8}$. Отже, рівняння гіперболи набуває вигляду $\dfrac{x^2}{\frac{9}{8}} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Приклад 4.8. Напишіть рівняння гіперболи, якщо прямі $7x+y=0$ і $x-y+8=0$ є її асимптотами, а один з фокусів розташований у точці $F(-3;1)$.

Розв'язання. Знайдемо канонічну систему координат $O'x'y'$ для заданої гіперболи.

Точка O' перетину асимптот є початком системи координат, тому її координати знаходимо як розв'язок системи двох рівнянь $\begin{cases} 7x+y=0 \\ x-y+8=0 \end{cases}$, а саме $O'(-1;7)$.

Базовими векторами канонічної системи координат $O'x'y'$ будуть вектори $\vec{i}\,' = \dfrac{\overrightarrow{O'F}}{|\overrightarrow{O'F}|} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}; -\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$ і перпендикулярний до нього вектор $\vec{j}\,' = \left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}; -\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)$ (див. рис. 25).

Запишемо формули переходу від системи координат Oxy до системи координат $O'x'y'$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ або}$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}x' + \dfrac{3}{\sqrt{10}}y' - 1 \\ y = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}x' - \dfrac{1}{\sqrt{10}}y' + 7 \end{cases}. \tag{4.12}$$

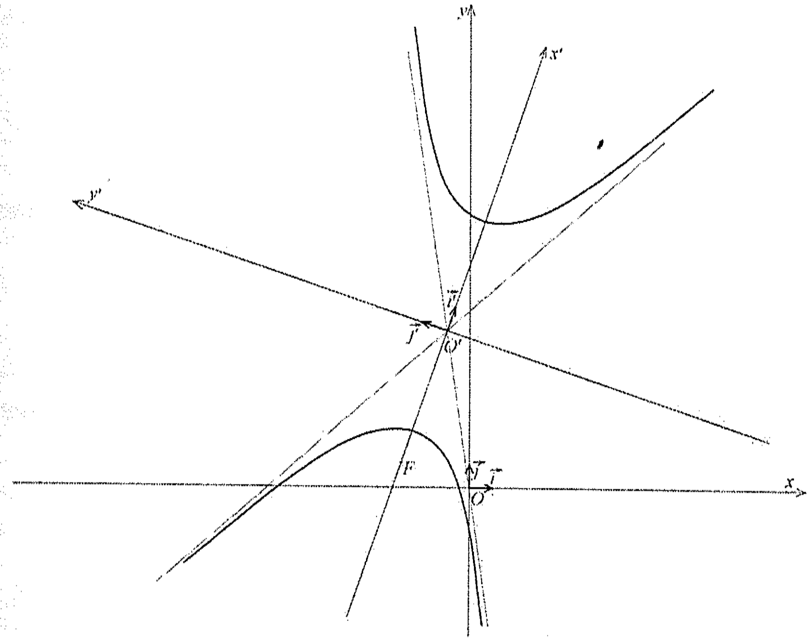


Рис. 25

Знайдемо рівняння асимптот у канонічній системі координат $O'x'y'$

$$a_1: \quad 7\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}x' + \frac{3}{\sqrt{10}}y' - 1\right) + \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}x' - \frac{1}{\sqrt{10}}y' + 7\right) = 0$$

$$\text{або } y' = \frac{1}{2}x',$$

$$a_2: \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}x' + \frac{3}{\sqrt{10}}y' - 1\right) - \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}x' - \frac{1}{\sqrt{10}}y' + 7\right) + 8 = 0$$

$$\text{або } y' = -\frac{1}{2}x'.$$

З рівнянь асимптот одержуємо $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ та, оскільки $c = \sqrt{10}$, то $a^2 = 32$, $b^2 = 8$. Отже, канонічне рівняння гіперболи в канонічній системі координат $O'x'y'$ набуває вигляду $\frac{x'^2}{32} - \frac{y'^2}{8} = 1$. Використовуючи формули переходу (4.12), запишемо зворотні формули переходу

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{\sqrt{10}}x - \frac{3}{\sqrt{10}}y + 2\sqrt{10} \\ y' = \frac{3}{\sqrt{10}}x - \frac{1}{\sqrt{10}}y + \sqrt{10} \end{cases}. \qquad (4.13)$$

Підставимо формули (4.13) в рівняння гіперболи, тоді рівняння гіперболи в системі координат Oxy набуде вигляду

$$\frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}x - \frac{3}{\sqrt{10}}y + 2\sqrt{10}\right)^2}{32} - \frac{\left(\frac{3}{\sqrt{10}}x - \frac{1}{\sqrt{10}}y + \sqrt{10}\right)^2}{8} = 1.$$

Після елементарних перетворень цього рівняння одержуємо рівняння гіперболи в початковій системі координат

$$7x^2 - 6xy - y^2 + 56x + 8y + 64 = 0.$$

Вправи

4.3.1. Обчисліть довжини півосей, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис і рівняння асимптот гіперболи:

а) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; б) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$;

в) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; г) $\frac{x^2}{25} - y^2 = 1$.

4.3.2. Запишіть канонічне рівняння гіперболи, якщо її дійсна вісь дорівнює 5, а вершина ділить відстань між центром і фокусом у відношенні 1:2.

4.3.3. Запишіть канонічне рівняння гіперболи, якщо її дійсна вісь дорівнює 4, а вершина ділить відстань між центром і фокусом у відношенні 2:3.

4.3.4. Запишіть канонічне рівняння гіперболи, якщо відстань між її вершинами дорівнює 4, а один із фокусів розташований у точці $F(-5;0)$.

4.3.5. Запишіть канонічне рівняння гіперболи, якщо відстань між її вершинами дорівнює 6, а один із фокусів розташований у точці $F(4;0)$.

4.3.6. Запишіть канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що точки $F_1(-3;0)$, $F_2(3;0)$ є її фокусами і точка $A(1;0)$ належить гіперболі.

4.3.7. Запишіть канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що точки $F_1(-\sqrt{5};0)$, $F_2(\sqrt{5};0)$ є її фокусами і точка $A(-2;0)$ належить гіперболі.

4.3.8. Запишіть канонічне рівняння гіперболи, якщо відстань між її директрисами дорівнює 18, а відстань між фокусами — 20.

4.3.9. Запишіть канонічне рівняння гіперболи, якщо відстань між її директрисами дорівнює 2, а відстань між фокусами — 6.

4.3.10. На гіперболі $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$ вибрано точку з абсцисою 10 і додатною ординатою. Обчисліть фокальні радіуси цієї точки.

4.3.11. На гіперболі $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ знайдіть таку точку, для якої фокальні радіуси перпендикулярні.

4.3.12. На гіперболі $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ знайдіть таку точку, для якої лівий фокальний радіус вдвічі більший ніж правий фокальний радіус.

4.3.13. Запишіть рівняння гіперболи, якщо осі гіперболи паралельні до осей координат, точка $(-1;3)$ належить гіперболі, а прямі $y = \pm 2x$ є її асимптотами.

4.3.14. Запишіть рівняння гіперболи, якщо осі гіперболи паралельні до осей координат, точка $(-6;5)$ належить гіперболі, а прямі $y = \pm\frac{1}{2}x$ є її асимптотами.

4.3.15. Запишіть рівняння гіперболи, якщо відомо її ексцентриситет $e = \frac{4}{3}$, фокус $F(3,3)$, і рівняння відповідної директриси $5x - 12 = 0$.

4.3.16. Запишіть рівняння гіперболи, якщо відомо її ексцентриситет $e = \frac{3}{2}$, фокус $F(-1,2)$, і рівняння відповідної директриси $x - 3 = 0$.

4.3.17. Запишіть рівняння гіперболи, якщо її уявна піввісь дорівнює $\sqrt{5}$, а фокуси розташовані у точках $F_1(-3,2)$, $F_2(5;2)$.

4.3.18. Запишіть рівняння гіперболи, якщо її уявна піввісь дорівнює 1, а фокуси розташовані у точках $F_1(-1;-1)$, $F_2(3;-1)$.

4.3.19. Запишіть рівняння гіперболи, якщо пряма $x = -\frac{3}{2}$ — одна з її директрис, а $F(0;0)$ — один із фокусів. Ексцентриситет гіперболи дорівнює 2.

4.3.20. Запишіть рівняння гіперболи, якщо пряма $x = -2$ — одна з її директрис, а $F(-5;0)$ — один із фокусів. Ексцентриситет гіперболи дорівнює 3.

4.3.21. Обчисліть ексцентриситет гіперболи, якщо її півосі рівні.

4.3.22. Обчисліть ексцентриситет гіперболи, якщо кут між асимптотами, який містить фокус, дорівнює $120°$.

4.3.23. Обчисліть ексцентриситет гіперболи, якщо її асимптотами є $y = \pm 3x$.

4.3.24. Обчисліть ексцентриситет гіперболи, якщо відстані від точки $(5;-4)$, що належить цій гіперболі, до директрис відносяться як $2:1$.

4.3.25. Запишіть рівняння гіперболи, що проходить через точку $(1;2)$ і має асимптотами прямі $y = 3$ і $x = 2$.

4.3.26. Запишіть рівняння гіперболи, що проходить через точку $(1;0)$ і має асимптотами прямі $y = 1$ і $x = 0$.

4.3.27. Запишіть рівняння гіперболи, фокуси якої мають координати $(1;0)$, $(0;1)$ і асимптоти паралельні до осей координат.

4.3.28. Запишіть канонічне рівняння гіперболи, якщо її асимптотами є прямі $3x - y = 0$ і $3x + y = 0$, а дійсна піввісь дорівнює 2.

4.3.29. Запишіть канонічне рівняння гіперболи, якщо її асимптотами є прямі $5x - 2y = 0$ і $5x + 2y = 0$, а дійсна піввісь дорівнює 10.

4.3.30. Центр гіперболи розташований у точці $O'(1;2)$, одна з вершин — у точці $A(-1;0)$, а відповідний до цієї вершини фокус у точці $F(-2;-1)$. Запишіть рівняння гіперболи.

4.3.31. Центр гіперболи розташований у точці $O'(0;1)$, одна з вершин — в точці $A(1;3)$, а відповідний до цієї вершини фокус у точці $F(2;5)$. Запишіть рівняння гіперболи.

4.3.32. Запишіть рівняння гіперболи, для якої прямі $3x - 4y = 0$ і $4x + 3y + 2 = 0$ є, відповідно, дійсною та уявною осями, а довжини півосей $a = 5$, $b = 1$.

4.3.33. Запишіть рівняння гіперболи, для якої прямі $x + y - 3 = 0$ і $x - y + 1 = 0$ є, відповідно, дійсною та уявною осями, а довжини півосей $a = 4$, $b = 3$.

4.3.34. Знайдіть рівносторонню гіперболу, директриса якої задається рівнянням $x + y - 1 = 0$, а точка $F(1;1)$ є фокусом цієї гіперболи.

4.3.35. У гіперболі відомо два фокуси $F_1(2;0)$, $F_2(1;-1)$ та уявну піввісь $b = \dfrac{1}{2}$. Знайдіть рівняння цієї гіперболи.

4.3.36. Запишіть рівняння гіперболи, фокуси якої лежать у вершинах еліпса $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$, а директриси проходять через фокуси цього еліпса.

4.3.37. Запишіть рівняння гіперболи, вершини якої лежать у вершинах еліпса $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{1} = 1$, а директриси проходять через фокуси цього еліпса.

4.3.38. Канонічно розташовані еліпс і гіпербола мають спільні фокальні хорди, які перпендикулярні до осі абсцис. Визначте ексцентриситет гіперболи, якщо ексцентриситет еліпса $\dfrac{1}{2}$.

4.3.39. Запишіть канонічне рівняння гіперболи, що має з еліпсом $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ спільні фокальні хорди, які перпендикулярні до осі абсцис.

4.3.40.* Запишіть канонічне рівняння еліпса, що має з рівносторонньою гіперболою $x^2 - y^2 = 1$ спільні фокальні хорди, які перпендикулярні до осі абсцис.

4.3.41.* В афінній системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$, де $|\vec{e}_1| = 2$, $|\vec{e}_2| = 3$, $\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_2) = \dfrac{\pi}{3}$ запишіть рівняння гіперболи, якщо її фокуси містяться в точках $F_1(-2;0)$, $F_2(2;0)$, а уявна піввісь $a = 1$.

4.4. Парабола. Поняття параболи. Канонічна система координат і канонічне рівняння параболи

Параболою називається множина точок площини, рівновіддалених від заданої точки, що називається *фокусом*, і заданої прямої, яка не проходить через фокус, що називається *директрисою*. Відстань від фокуса до директриси називаємо *фокальним параметром* параболи і позначаємо через p.

Початок O канонічної системи координат Oxy параболи збігається з серединою перпендикуляра, опущеного з фокуса на директрису, вісь Ox проходить через фокус F і точку O, вісь Oy перпендикулярна до осі Ox. В цій системі координат парабола має рівняння

$$y^2 = 2px, \tag{4.14}$$

яке називається *канонічним рівнянням* параболи. Вісь Ox називається *віссю симетрії* параболи.

Нехай $M(x_0; y_0)$ довільна точка параболи, яка задана своїм канонічним рівнянням $y^2 = 2px$. Відрізок FM називається *фокальним радіусом* точки M і обчислюється

$$r = FM = \left| x_0 + \frac{p}{2} \right|.$$

Приклад 4.9. Напишіть рівняння параболи, якщо її фокус має координати $F(1; 2)$, а вершина розташована в точці $A(-1; 0)$.

Розв'язання. *Перший спосіб.* Координати симетричної точки B до фокуса F параболи стосовно вершини A параболи будуть $(-3; -2)$. Через точку B перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{AF} = (2; 2)$ проходить директриса параболи, її рівняння таке: $x + y + 5 = 0$. Точка $M(x; y)$ належить параболі тоді і тільки тоді, коли $|MF| = d(M, l)$, тобто

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \frac{|x + y + 5|}{\sqrt{2}}.$$

Після спрощення отримуємо рівняння

$$x^2 - 2xy + y^2 - 14x - 18y - 15 = 0.$$

Другий спосіб. Параметр параболи $p = 2|\overrightarrow{AF}| = 4\sqrt{2}$.

Канонічна система координат $O'x'y'$ визначається так: початок системи координат O' розташований у вершині параболи, базовий вектор осі абсцис $\vec{i}\,' = \dfrac{\overrightarrow{AF}}{|\overrightarrow{AF}|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ і базовий вектор осі ординат $\vec{j}\,' = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ є перпендикулярним до $\vec{i}\,'$ (див. рис. 26).

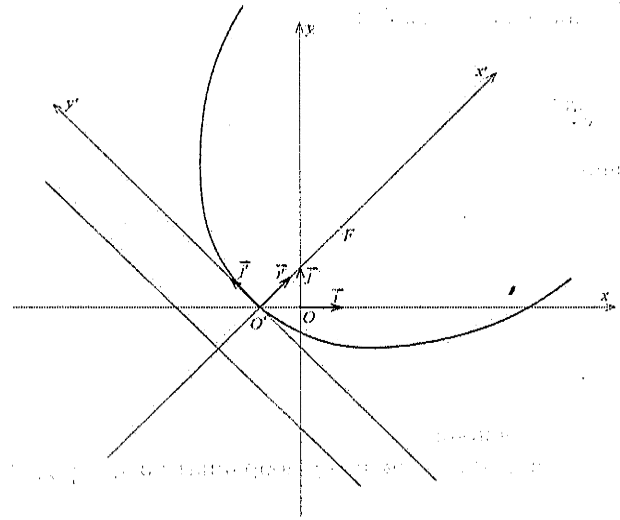


Рис. 26

Формули переходу від системи координат Oxy до системи координат $O'x'y'$ набувають вигляду

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ або}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y' - 1 \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y' \end{cases}$$

і в зворотному вигляді

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y' = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

У канонічній системі координат парабола має канонічне рівняння

$y'^2 = 8\sqrt{2}x'$, яке в початковій системі координат набуватиме вигляду

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 8\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Обчисливши, отримуємо

$$x^2 - 2xy + y^2 - 14x - 18y - 15 = 0.$$

Вправи

4.4.1. Знайдіть фокальний параметр, фокус і рівняння директриси параболи:

а) $y^2 = 8x$; б) $y^2 = -8x$; в) $y^2 = 10x$; г) $y^2 = -10x$.

4.4.2. Запишіть рівняння параболи, якщо її вісь збігається з віссю абсцис, вершина лежить у початку координат і вона проходить через точку $A(-1;2)$.

4.4.3. Запишіть канонічне рівняння параболи, яка проходить через точку $A(3;-2)$.

4.4.4. На параболі $y^2 = 6x$ знайдіть таку точку M, щоб площа трикутника з вершинами в точці M, фокусі параболи і точці перетину директриси параболи з її віссю, дорівнювала 3.

4.4.5. На параболі $y^2 = 8x$ знайдіть таку точку M, щоб площа трикутника з вершинами в точці M, фокусі параболи і точці перетину директриси параболи з її віссю, дорівнювала 6.

4.4.6. Запишіть рівняння параболи, якщо її вісь паралельна до осі Oy, гілки параболи перетинають вісь Ox у точках $A(-1;0)$, $B(3;0)$, а параметр $p = 5$. Скільки розв'язків має задача?

4.4.7. Запишіть рівняння параболи, якщо її вісь паралельна осі Oy, гілки параболи перетинають вісь Ox у точках $A(5;0)$, $B(-3;0)$, а параметр $p = 2$. Скільки розв'язків має задача?

4.4.8. На параболі $y^2 = 8x$ знайдіть таку точку M, в якої фокальний радіус дорівнює 20.

4.4.9. На параболі $y^2 = 2px$ задано точку $M(10;-10)$. Обчисліть фокальний радіус цієї точки.

4.4.10. На параболі $y^2 = 10x$ знайдіть таку точку M, що пряма, яка проходить через точку M і фокус параболи утворює з віссю абсцис кут $60°$.

4.4.11. На параболі $y^2 = 10x$ знайдіть таку точку M, що площа трикутника з вершинами в точці M, фокусі параболи і точці перетину директриси параболи з віссю абсцис дорівнює 5.

4.4.12. На параболі $y^2 = -10x$ знайдіть таку точку M, що відстань від точки M до вершини параболи дорівнює відстані від точки M до фокуса параболи.

4.4.13. На параболі $y^2 = -10x$ знайдіть таку точку M, що відстані від точки M до вершини параболи до фокуса параболи відносяться як $8:7$.

4.4.14. Запишіть рівняння параболи, якщо точка $F(0;3)$ — фокус, а пряма $x = -1$ — директриса параболи.

4.4.15. Запишіть рівняння параболи, якщо точка $F(0;-2)$ — фокус, а пряма $x = 4$ — директриса параболи.

4.4.16. Запишіть рівняння параболи, якщо точка $F(-1;-2)$ — фокус, а пряма $y = 1$ — директриса параболи.

4.4.17. Запишіть рівняння параболи, якщо точка $F(1;2)$ — фокус, а пряма $y = 0$ — директриса параболи.

4.4.18. Нехай $F(4;4)$ — фокус і $A(-1;-1)$ — вершина параболи. Запишіть рівняння параболи.

4.4.19. Нехай $F(-3;-3)$ — фокус і $A(1;1)$ — вершина параболи. Запишіть рівняння параболи.

4.4.20. Запишіть рівняння параболи з фокусом у точці $F(1;-1)$ і директрисою $x - 2y = 0$.

4.4.21. Запишіть рівняння параболи з фокусом у точці $F(-2;-3)$ і директрисою $x + y = 0$.

4.4.22. Запишіть рівняння параболи з фокусом у точці $F(0;1)$, якщо вона симетрична стосовно осі Oy і дотикається до осі Ox.

4.4.23. Запишіть рівняння параболи, якщо її вісь паралельна до осі Oy, фокус лежить на осі Ox, парабола проходить через початок координат і відтинає на осі Ox відрізок довжини 6.

4.4.24. Обчисліть довжину сторони правильного трикутника, вписаного в параболу $y^2 = 2\sqrt{3}x$.

4.4.25. Через точку $(2;1)$ проведено хорду параболи $y^2 = 4x$, яка в цій точці ділиться навпіл. Запишіть рівняння цієї хорди.

4.4.26. Запишіть рівняння параболи, яка має спільні фокус, вісь і параметр з параболою $y^2 = 18x$ і протилежний напрям осей.

4.4.27. Запишіть рівняння параболи, яка має спільні фокус, вісь і параметр з параболою $x^2 = 18y - 54$ і протилежний напрям осей.

4.4.28. Запишіть рівняння параболи, вершина якої розташована в правому фокусі еліпса $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$, а фокус параболи збігається з лівим фокусом цього еліпса.

4.4.29. Запишіть рівняння параболи, вершина якої розташована в лівому фокусі еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, а фокус параболи збігається з правим фокусом цього еліпса.

4.4.30. Запишіть рівняння параболи, вершина якої розташована в одному з фокусів еліпса $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{49} = 1$, а фокус параболи збігається з іншим фокусом цього еліпса.

4.4.31. Запишіть рівняння параболи, вершина якої розташована в вершині малої півосі еліпса $\frac{x^2}{117} + \frac{y^2}{36} = 1$ і ця парабола проходить через фокуси цього еліпса.

4.4.32. Запишіть рівняння параболи, вершина якої розташована в лівій вершині гіперболи $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{75} = 1$, а фокус параболи збігається з правим фокусом цієї гіперболи.

4.4.33. Запишіть рівняння параболи, вершина якої розташована в правому фокусі гіперболи $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{32} = 1$, а фокус параболи збігається з лівою вершиною цієї гіперболи.

4.4.34. Запишіть рівняння параболи, вершина якої розташована на осі ординат, і трикутник, який має вершинами фокуси гіперболи $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{400} = 1$ та вершину параболи, є рівностороннім.

4.4.35.* Знайдіть радіус найбільшого кола, яке міститься всередині параболи $y^2 = 2px$ і дотикається до цієї парабол в її вершині.

4.5. Директоріальна властивість еліпса, гіперболи та параболи

Фокус еліпса (гіперболи) і директриса еліпса (гіперболи) називаються *відповідними*, якщо вони розташовані в одній півплощині стосовно малої (уявної) осі.

Теорема 4.5.1. *Відношення відстаней від будь-якої точки еліпса до його фокуса і відповідної директриси є величиною сталою і дорівнює ексцентриситету еліпса.*

Теорема 4.5.2. *Відношення відстаней від будь-якої точки гіперболи до її фокуса і відповідної директриси є величиною сталою і дорівнює ексцентриситету гіперболи.*

Задача 4.3. На площині задано пряму l і точку F, що не належить l. Знайдіть множину всіх точок, відношення відстаней від кожної з яких до точки F і до прямої l є величиною сталою і дорівнює деякому додатному числу e.

Розв'язання. Якщо $e = 1$, то за означенням задана множина точок є параболою.

Розглянемо випадок, коли $e \neq 1$. Проведемо через точку F пряму перпендикулярну до прямої l, позначимо точку перетину цієї прямої з прямою l через H. Розглянемо на прямій FH точку O таку, що $|OF| = \frac{me^2}{|e^2-1|}$, де $m = |FH|$. Якщо $e > 1$, то точку O виберемо на промені FH, а якщо $e < 1$, то — на промені HF (так, щоб точка F лежала між точками O і H). Точку O приймемо за початок прямокутної декартової системи координат, а пряму OF за вісь абсцис, додатний напрям якої збігається з вектором $\overrightarrow{OF}$.

Напишемо рівняння розглядуваної множини точок у вибраній системі координат.

а) Нехай $e < 1$. Тоді

$$|OF| = \frac{me^2}{1-e^2}, \quad |OH| = |OF| + |FH| = \frac{me^2}{1-e^2} + m = \frac{m}{1-e^2}.$$

А отже, точка F має координати $\left(\frac{me^2}{1-e^2}; 0\right)$, а пряма l має рівняння $x = \frac{m}{1-e^2}$. Якщо точка M належить заданій множині, то $|MF| = e \cdot \rho_M$, де ρ_M — відстань від точки M до прямої l. Але $|MF| = \sqrt{(x - \frac{me^2}{1-e^2})^2 + y^2}$, а $\rho_M = |x - \frac{m}{1-e^2}|$. Отже, координати точки M задовольняють рівняння

$$\sqrt{\left(x-\frac{me^2}{1-e^2}\right)^2+y^2}=e\cdot\left|x-\frac{m}{1-e^2}\right|.$$

Після піднесення цієї рівності до квадрата та деяких перетворень отримуємо рівняння

$$(1-e^2)x^2+y^2=\frac{m^2e^2}{1-e^2}$$

або

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

де $a^2=\dfrac{m^2e^2}{(1-e^2)^2}$, $b^2=\dfrac{m^2e^2}{1-e^2}$. Отож, будь-яка точка заданої множини належить еліпсу з півосями $a=\dfrac{me}{1-e^2}$, $b=\dfrac{me}{\sqrt{1-e^2}}$.

Доведемо, що кожна точка еліпса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ належить розглядуваній множині. Знайдемо правий фокус, відповідну йому директрису та ексцентриситет цього еліпса. Оскільки

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{\frac{m^2e^2}{(1-e^2)^2}-\frac{m^2e^2}{1-e^2}}=\frac{me^2}{1-e^2},$$

то правий фокус еліпса має координати $\left(\dfrac{me^2}{1-e^2};0\right)$, а отже, збігається з точкою F. Позаяк $\dfrac{a^2}{c}=\dfrac{m^2e^2}{(1-e^2)^2}:\dfrac{me^2}{1-e^2}=\dfrac{m}{1-e^2}$, то директриса еліпса збігається із прямою l. Ексцентриситет еліпса $\dfrac{c}{a}=\dfrac{me^2}{1-e^2}:\dfrac{me}{1-e^2}=e$. Із директоріальної властивості еліпса випливає, що кожна точка еліпса належить заданій множині. Отже, ця множина і є еліпсом.

б) Нехай $e>1$. В цьому випадку

$$|OF|=\frac{me^2}{e^2-1},\ |OF|-|FH|=\frac{me^2}{e^2-1}-m=\frac{m}{e^2-1},$$

причому $|OF|>|FH|$ і пряма l має рівняння $x=\dfrac{m}{e^2-1}$. Проводячи міркування, аналогічні до випадку а, отримуємо, що задана множина є гіперболою

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

де $a^2=\dfrac{m^2e^2}{(e^2-1)^2}$, $b^2=\dfrac{m^2e^2}{e^2-1}$.

Підсумовуючи результати попередньої задачі, отримуємо таку теорему.

Теорема 4.5.3. *Нехай на площині задано довільну пряму l і точку F, що не належить l. Множина всіх точок, відношення відстаней від кожної з яких до точки F і до прямої l є величиною сталою, яка дорівнює деякому додатному числу e, є еліпсом, якщо $e<1$, гіперболою, якщо $e>1$, і параболою, якщо $e=1$.*

За означенням параболи відстань від довільної точки до фокуса така сама як і відстань від цієї точки до директриси параболи, тобто відношення цих відстаней дорівнює 1 (а це і є ексцентриситетом параболи).

Приклад 4.10. Визначте траєкторію точки M, яка, рухаючись, залишається вдвічі ближчою до точки $F(-1;0)$, ніж до прямої $x=-4$.

Розв'язання. Нехай точка M має координати $(x;y)$. Тоді за умовою одержуємо

$$\rho(M,F)=\frac{1}{2}\rho(M,l)\quad\text{або}\quad\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\frac{1}{2}|x+4|.$$

Піднесемо обидві частини до квадрата і, після спрощення, одержимо $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

Легко перевірити таке: якщо координати точки M задовольняють рівняння $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$, то точка M вдвічі ближче до точки F, ніж до прямої $x=-4$. Отже, точка M рухається по еліпсу, рівняння якого $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

Приклад 4.11. Запишіть рівняння лінії другого порядку, фокус якої є в точці $F(2;0)$, а відповідна йому директриса має рівняння $x=6$, і ця лінія проходить через точку $A(-4;8)$.

Розв'язання. Позаяк $\dfrac{d(A,F)}{d(A,l)} = \dfrac{\sqrt{(-4-2)^2+8^2}}{|-4-6|} = 1$, то ця лінія є параболою. Нехай $M(x;y)$ довільна точка цієї параболи, тоді

$$\frac{d(M,F)}{d(M,l)} = 1 \quad \text{або} \quad \frac{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}{|x-6|} = 1,$$

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2} = |x-6|,$$

$$(x-2)^2+y^2 = (x-6)^2.$$

Після спрощення отримуємо рівняння параболи

$$y^2 = -8x+32.$$

Приклад 4.12. Запишіть рівняння лінії другого порядку, вершина якої розташована в точці $A(0;2)$, фокус — у точці $F(3;-1)$, а ексцентриситет $e=\dfrac{1}{2}$.

Розв'язання. Оскільки ексцентриситет менший за 1, то ця лінія є еліпсом. Можливі два випадки: задані вершина і фокус розташовані по один бік від центра еліпса, або по різні боки.

Перший випадок. Нехай вершина і фокус розташовані по один бік від центра еліпса. Знайдемо рівняння тієї директриси l еліпса, яка лежить по той самий бік від центра, що й задані точки. Нехай $H(x;y)$ основа перпендикуляра, опущеного з вершини A еліпса на директрису l. За директоріальною властивістю еліпса

$$|AF| = e\cdot d(A,l) \quad \text{або} \quad \overrightarrow{FA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}.$$

Отже,

$$(-3;3) = \frac{1}{2}(x-0;y-2).$$

З останньої рівності отримуємо координати $x=-6$, $y=8$ точки H. Директриса перпендикулярна до вектора $\overrightarrow{FA}$ і проходить через точку H, тому її рівняння

$$-3(x+6)+3(y-8)=0 \quad \text{або} \quad x-y+14=0.$$

За директоріальною властивістю еліпса, точка $M(x;y)$ належить еліпсу тоді і тільки тоді, коли

$$|FM| = e\cdot d(M,l), \quad \text{тобто} \quad \sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{|x-y+14|}{\sqrt{2}}$$

$$\text{або } (x-3)^2+(y+1)^2 = \frac{1}{8}(x^2+y^2+196-2xy+28x-28y).$$

Після спрощення отримуємо рівняння

$$7x^2+2xy+7y^2-76x+44y-116=0.$$

Другий випадок. Нехай задані вершина A і фокус F розташовані по різні боки від центра еліпса і нехай $E(x;y)$ інший фокус еліпса. Оскільки

$$\frac{|AE|}{|AF|} = \frac{a-c}{a+c} = \frac{1-\frac{c}{a}}{1+\frac{c}{a}} = \frac{1-e}{1+e} = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3},$$

то

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AF} \quad \text{або} \quad (x;y-2) = \frac{1}{3}(3;-3).$$

Отож, фокус E має координати $x=1$, $y=1$ і розташований з того самого боку, що й вершина A. Проводячи ті ж міркування, що і в попередньому випадку, знаходимо рівняння еліпса

$$7x^2+2xy+7y^2-28x-4y-20=0.$$

Вправи

4.5.1. Запишіть рівняння лінії другого порядку, якщо її фокус розташований у точці $F(1;-2)$, відповідна до фокуса директриса задана рівнянням $3x-y=0$, а ексцентриситет:

а) $e=\frac{1}{4}$; б) $e=\frac{3}{2}$; в) $e=1$.

4.5.2. Запишіть рівняння лінії другого порядку, якщо її фокус розташований у точці $F(1;-2)$, відповідна до фокуса директриса задана рівнянням $x+2y-1=0$, а ексцентриситет:

а) $e=\frac{1}{3}$; б) $e=2$; в) $e=1$.

4.5.3. Запишіть рівняння множини точок площини, рівновіддалених від точки $F(-3;1)$ і прямої $5x-y-2=0$.

4.5.4. Запишіть рівняння множини точок площини, рівновіддалених від точки $F(1;-1)$ і прямої $x-4y=0$.

4.5.5. Запишіть рівняння множини точок площини, відношення відстаней від кожної з яких до точки $F(4;0)$ і до прямої $x=10$ дорівнює:

а) $\frac{1}{2}$; б) 1; в) 2.

4.5.6. Запишіть рівняння множини точок, відношення відстаней від кожної з яких до точки $F(3;3)$ і до прямої $x+y=0$ дорівнює:

а) $e=\frac{1}{2}$; б) $e=2$; в) $e=1$.

4.5.7. Відомо фокус $F(3;0)$ деякої лінії та рівняння відповідної директриси $x=12$. Визначте тип лінії, якщо ця лінія проходить через точку $A(7;3)$.

4.5.8. Точки $F_1(-2;1)$ і $F_2(0;-5)$ є фокусами деякої гіперболи. Визначте рівняння цієї гіперболи, якщо вона проходить через точку $A\left(\dfrac{5}{2};1\right)$. Знайдіть ексцентриситет і рівняння директрис цієї гіперболи.

4.5.9. Відомо фокус $F(1;-4)$, вершину $A(-2;2)$ деякої лінії, які розташовані по один бік від центра цієї лінії та ексцентриситет $e==\dfrac{1}{3}$. Запишіть рівняння цієї лінії.

4.5.10. Відомо фокус $F(-1;7)$, вершину $A(4;2)$ деякої лінії, які розташовані по різні боки від центра цієї лінії та ексцентриситет $e=\dfrac{2}{3}$. Запишіть рівняння цієї лінії.

4.5.11. Відомо фокус $F(0;4)$, вершину $A(3;-2)$ деякої лінії та ексцентриситет $e=3$. Запишіть рівняння цієї лінії.

4.5.12. Запишіть рівняння параболи, вершина якої розташована в точці $A(10;-6)$, а фокус — у точці $F(6;-4)$.

4.5.13.* Визначте геометричне місце точок, сума відстаней від яких до деякої фіксованої точки і до деякої фіксованої прямої стала.

4.6. Рівняння дотичних до еліпса, гіперболи та параболи в канонічній системі координат. Оптична властивість еліпса, гіперболи та параболи

Розглянемо лінію l і на ній деяку фіксовану точку M_0. Розглянемо на лінії ще одну точку M і проведемо через точки M і M_0 пряму.

Пряму, що проходить через дві точки лінії, називають *січною*. Нехай точка M рухається вздовж лінії l, наближаючись до точки M_0. Тоді січна MM_0 повертається навколо точки M_0, а довжина відрізка MM_0 прямує до 0. Якщо у цьому випадку величина кута MM_0T (див. рис. 27) прямує до 0, то пряму M_0T називають *граничним положенням січної* MM_0.

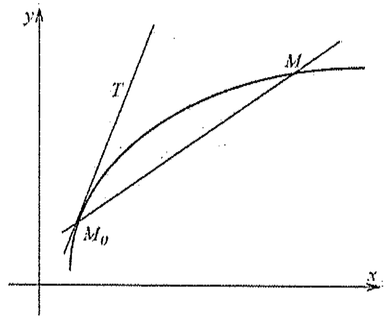


Рис. 27

Пряму M_0T, яка є граничним положенням січної MM_0, називають *дотичною до лінії* l у точці M_0.

Якщо неперервна функція $y=f(x)$ має похідну в точці x_0, то рівняння дотичної в точці $(x_0;f(x_0))$ до графіка функції $y=f(x)$ набуває вигляду

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0). \tag{4.15}$$

Задача 4.4. Довести, що в канонічній системі координат дотична до еліпса в точці $(x_1;y_1)$ задана рівнянням

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1. \tag{4.16}$$

Розв'язання. Розглянемо дотичні до еліпса, які проведено в точках, що належать верхній ($y>0$) частині еліпса. Ця частина еліпса задається рівнянням $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. В точці дотику $(x_1;y_1)$ рівняння дотичної (див. (4.15)) набуватиме вигляду

$$y-y_1=y'(x_1)(x-x_1)=\frac{b}{a}\frac{-x_1}{\sqrt{a^2-x_1^2}}(x-x_1).$$

Зробивши елементарні перетворення цього рівняння і врахувавши, що точка дотику належить еліпсу, отримуємо $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$.

Аналогічне співвідношення отримуємо, коли точка дотику $(x_1; y_1)$ належить нижній ($y < 0$) частині еліпса $y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

При $y = 0$ ми отримуємо вершини еліпса, що розташовані на великій осі, дотичними в цих точках будуть прямі $x = \pm a$. Їхні рівняння можна легко отримати, якщо розглядати праву і ліву частини еліпса, тобто розглядати рівняння $x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$.

Задача 4.5. Довести, що в канонічній системі координат дотична до гіперболи в точці $(x_1; y_1)$ задана рівнянням

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1. \qquad (4.17)$$

Розв'язання. Доведення аналогічне як у задачі 4.4.

Задача 4.6. Довести, що в канонічній системі координат дотична до параболи в точці $(x_1; y_1)$ визначається рівнянням

$$yy_1 = p(x + x_1). \qquad (4.18)$$

Розв'язання. Спочатку розглянемо верхню ($y > 0$) гілку параболи $y = \sqrt{2px}$. Рівняння дотичної (див. (4.15)) в точці дотику $(x_1; y_1)$ набуде вигляду $y - y_1 = \frac{p}{\sqrt{2px_1}}(x - x_1)$. Помножимо це рівняння на $\sqrt{2px_1}$, одержимо

$$y\sqrt{2px_1} - y_1\sqrt{2px_1} = px - px_1.$$

Оскільки точка дотику належить параболі, то $y_1 = \sqrt{2px_1}$. Отож,

$$yy_1 - 2px_1 = px - px_1,$$

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Для нижньої ($y < 0$) гілки параболи введення аналогічне. В вершині параболи дотичною буде вісь ординат.

Теорема 4.6.1 (Оптична властивість еліпса). *Дотична до еліпса в довільній точці M_0 еліпса є бісектрисою зовнішнього кута M_0 трикутника $M_0F_1F_2$ (див. рис. 28).*

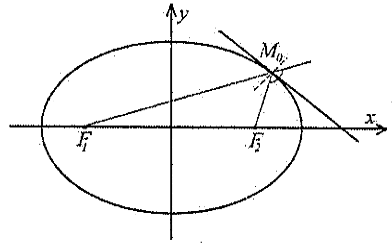


Рис. 28

Теорема 4.6.2 (Оптична властивість гіперболи). *Дотична до гіперболи в довільній точці M_0 гіперболи є бісектрисою внутрішнього кута M_0 трикутника $M_0F_1F_2$ (див. рис. 29).*

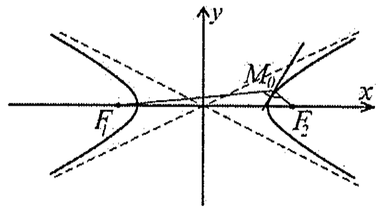


Рис. 29

Теорема 4.6.3 (Оптична властивість параболи). *Дотична до параболи в довільній точці M_0 параболи є бісектрисою кута FM_0D між фокальним радіусом M_0F і перпендикуляром M_0D, опущеним з точки M_0 на директрису (див. рис. 30).*

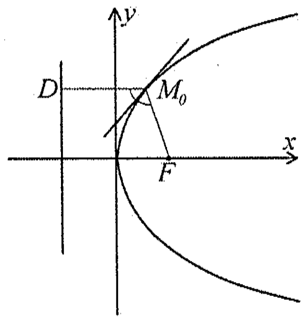


Рис. 30

Вправи

4.6.1. Знайдіть рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$, яка містить точку $(2;-3)$.

4.6.2. Знайдіть рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{9}=1$, яка містить точку $(-6;3)$.

4.6.3. Знайдіть рівняння дотичної до еліпса $3x^2+8y^2=45$, відстань від яких до центра еліпса дорівнює 3.

4.6.4.* Знайдіть рівняння сторін квадрата, який описано навколо еліпса $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.

4.6.5. Знайдіть рівняння тієї дотичної до еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, відношення відстаней від якої до фокусів еліпса дорівнює 9.

4.6.6.* Доведіть, що добуток відстаней від довільної дотичної до еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ до фокусів еліпса є величиною сталою, і ця стала дорівнює b^2.

4.6.7.* Прямий кут рухається так, що його сторони постійно дотичні до еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Опишіть геометричне місце вершин цього кута.

4.6.8. Знайдіть рівняння дотичної до гіперболи $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$, яка містить точку $(5;-4)$.

4.6.9. Знайдіть рівняння дотичної до гіперболи $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{9}=1$, яка містить точку $(2;0)$.

4.6.10. Знайдіть рівняння тієї дотичної до гіперболи $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}==1$, яка розташована на однаковій відстані від центра і від правого фокуса цієї гіперболи.

4.6.11.* Прямий кут рухається так, що його сторони постійно дотичні до гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Опишіть геометричне місце вершин цього кута.

4.6.12. Знайдіть координати точки перетину параболи $y^2=4x$ і її дотичної $x+3y+9=0$.

4.6.13. Знайдіть рівняння дотичної до параболи $y^2=8x$, яка містить точку $(5;-7)$.

4.6.14. Визначте параметр параболи $y^2=2px$, якщо відомо, що пряма $x-2y+5=0$ є її дотичною.

4.6.15.* Доведіть, що довільна дотична до параболи $y^2=2px$ відтинає на від'ємній частині осі Ox відрізок, довжина якого дорівнює абсцисі точки дотику, а на осі Oy — відрізок, довжина якого дорівнює половині ординати точки дотику.

4.6.16.* Доведіть, що відрізок довільної дотичної до еліпса, який міститься між дотичними до еліпса, проведеними в вершинах великої осі, видно з кожного фокуса під прямим кутом.

4.6.17. Обчисліть площу трикутника, утвореного асимптотами гіперболи і довільною дотичною до гіперболи.

4.6.18.* Доведіть, що фокус параболи та точки дотику двох дотичних, які проведено з довільної точки директриси, лежать на одній прямій.

4.7. Полярна система координат. Рівняння еліпса, гіперболи та параболи в полярній системі координат. Параметричні рівняння еліпса, гіперболи та параболи

Згідно з першим законом Кеплера планети рухаються по еліптичних орбітах, а комети по гіперболічних і параболічних траєкторіях, в одному з фокусів яких є Сонце. Тому для астрономічних потреб еліпс, гіперболу та параболу зручно задавати в так званій полярній системі координат.

Полярна система координат на площині задається орієнтацією площини (зазвичай проти годинникової стрілки), точкою O, яка називається *полюсом*, і прямою з фіксованим одиничним вектором $\vec{i}$, який задає орієнтацію на прямій. Ця пряма називається *полярною віссю* полярної системи координат. Координатами довільної точки M площини в полярній системі координат є впорядкована пара $(\rho; \varphi)$, де ρ — довжина радіус-вектора точки M, тобто

$$\rho = \left|\overrightarrow{OM}\right|,$$

а кут φ — це орієнтований кут, тобто

$$\varphi = \begin{cases} \angle(\vec{i}, \overrightarrow{OM}), \text{ якщо } \vec{i} \curvearrowleft \overrightarrow{OM} \\ -\angle(\vec{i}, \overrightarrow{OM}), \text{ якщо } \vec{i} \curvearrowright \overrightarrow{OM} \\ 0, \text{ якщо } \vec{i} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OM} \\ \pi, \text{ якщо } \vec{i} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OM} \end{cases}.$$

Так введені координати задовольняють нерівності

$$0 \le \rho < \infty, \quad -\pi < \varphi \le \pi.$$

Прямокутна система координат $O_{\vec{i},\vec{j}}$ називається *узгодженою* з полярною системою координат, якщо вона має ту саму орієнтацію, початок збігається з полюсом, а вісь абсцис з полярною віссю полярної системи координат. Координати $(x; y)$ прямокутної системи координат, угодженої з полярною системою координат, виражаються через полярні координати $(\rho; \varphi)$ такими співвідношеннями:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ x = \rho \sin\varphi \end{cases}.$$

Якщо за полярну вісь взяти вісь Ox канонічної системи координат, а за полюс — лівий фокус для еліпса, правий фокус для гіперболи і фокус для параболи, то рівняння в полярній системі координат еліпса, правої гілки гіперболи та параболи мають такий самий вигляд:

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}, \tag{4.19}$$

де ρ і φ полярні координати точки лінії; p — половина довжини хорди, яка проходить через фокус і перпендикулярна до її фокальної осі; e — ексцентриситет лінії (у випадку параболи $e = 1$), у цьому випадку для еліпса і гіперболи $p = \dfrac{b^2}{a}$, а для параболи p — параметр.

Приклад 4.13. Запишіть рівняння гіперболи в полярних координатах, якщо задано її канонічне рівняння $\dfrac{x^2}{144} - \dfrac{y^2}{25} = 1$.

Розв'язання. Обчислимо фокальний параметр і ексцентриситет заданої гіперболи

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{25}{12} \quad \text{і} \quad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{169}}{12} = \frac{13}{12}.$$

Отже, в полярній системі координат рівняння гіперболи набуває вигляду

$$\rho = \frac{\frac{25}{12}}{1 - \frac{13}{12}\cos\varphi} \quad \text{або} \quad \rho = \frac{25}{12 - 13\cos\varphi}.$$

Приклад 4.14. Запишіть канонічне рівняння лінії, якщо задано її рівняння в полярних координатах $\rho = \dfrac{16}{5 - 3\cos\varphi}$.

Розв'язання. Маємо $\rho = \dfrac{16}{5 - 3\cos\varphi} = \dfrac{\frac{16}{5}}{1 - \frac{3}{5}\cos\varphi}$. Звідси $p = \dfrac{16}{5}$ і $e = \dfrac{3}{5}$.

Позаяк $e < 1$, то задана лінія є еліпсом. Оскільки для еліпса

$$p = \frac{b^2}{a} \text{ і } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a},$$

то, розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{b^2}{a} = \dfrac{16}{5} \\ \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \dfrac{3}{5} \end{cases}$, отримуємо $a = 5$ і $b = 4$. Отож, заданий еліпс зображається таким канонічним рівнянням:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

У багатьох задачах треба використовувати параметричне рівняння лінії.

Нехай еліпс задано його канонічним рівнянням $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Розглянемо коло $X^2+Y^2=a^2$, яке ми отримали внаслідок стиску $\begin{cases} x=X \\ y=\dfrac{b}{a}Y \end{cases}$. Нехай $M(x;y)$ довільна точка еліпса, $P(X;Y)$ відповідна їй точка на колі. Позначимо через t кут від додатного напряму осі Ox до променя OP (див. рис. 31). Тоді $\begin{cases} X=a\cos t \\ Y=a\sin t \end{cases}$, а отже, $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=\dfrac{b}{a}Y=\dfrac{b}{a}\cdot a\sin t=b\sin t \end{cases}$. Система рівностей

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases} \tag{4.20}$$

називається *параметричним рівнянням* еліпса, t — *ексцентричним кутом* точки M. Для знаходження кута t точки M потрібно побудувати коло на великій осі еліпса як на діаметрі і через точку M провести пряму, яка паралельна до малої осі еліпса. Точка P перетину цієї прямої з колом розташована на колі по той самий бік від великої осі еліпса, що й точка M. Кут t нахилу променя OP до додатного напряму осі Ox і є ексцентричним кутом t точки M.

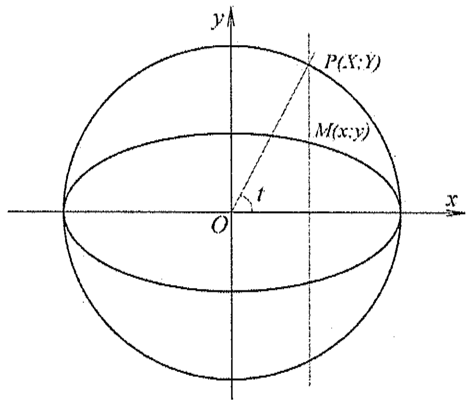


Рис. 31

Нехай гіперболу задано її канонічним рівнянням $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Перепишемо це рівняння у вигляді

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=1.$$

Очевидно, що

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\neq 0,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}\neq 0.$$

Приймемо $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=t \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{t} \end{cases}$, $t\neq 0$. Отож,

$$2\frac{x}{a}=t+\frac{1}{t},\quad 2\frac{y}{b}=t-\frac{1}{t},$$

або

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right) \\ y=\dfrac{b}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right) \end{cases},\ t\neq 0. \tag{4.21}$$

Ми довели, що координати довільної точки M гіперболи можна зобразити у вигляді $\left(\dfrac{a}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right);\dfrac{b}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)\right)$. Навпаки, якщо $t\neq 0$, то точка $M\left(\dfrac{a}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right);\dfrac{b}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)\right)$ належить гіперболі, позаяк

$$\frac{\left(\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)^2}{a^2}-\frac{\left(\frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right)^2}{b^2}=\frac{t^2+2+\frac{1}{t^2}}{4}-\frac{t^2-2+\frac{1}{t^2}}{4}=1.$$

Система рівностей (4.21) називається *параметричним рівнянням* гіперболи.

Якщо точка $M(x;y)$ належить тій гілці гіперболи, для точок якої $x\geq a$, то

$$\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\geq 0,\ \text{тобто}\ t>0.$$

Припустимо, що $t>0$, тоді $x\geq 0$, тобто точка M належить зазначеній гілці гіперболи.

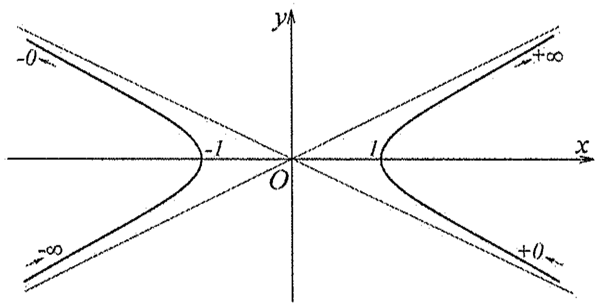


Рис. 32

При зміні параметра $t \in (0;1)$ значення x спадає від $+\infty$ до a, а значення y зростає від $-\infty$ до 0, при $t \in (1;+\infty)$ значення x зростає від a до $+\infty$, а значення y зростає від 0 до $+\infty$ (див. рис. 32). При $t = 1$ маємо, що $x = a$, $y = 0$, тобто отримуємо праву вершину гіперболи.

Якщо ж $t < 0$, то отримуємо ліву гілку гіперболи, де зі зміною параметра $t \in (-\infty;-1)$ значення x зростає від $-\infty$ до $-a$, а значення y зростає від $-\infty$ до 0, при $t \in (-1;0)$ значення x спадає від $-a$ до $-\infty$, а значення y зростає від 0 до $+\infty$. При $t = -1$ маємо, що $x = -a$, $y = 0$, тобто отримуємо ліву вершину гіперболи.

Нехай параболу задано її канонічним рівнянням $y^2 = 2px$. Приймемо $y = t$, тоді

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}, -\infty < t < \infty. \tag{4.22}$$

Система рівностей (4.22) називається *параметричним рівнянням* параболи.

Вправи

4.7.1. Запишіть канонічне рівняння лінії другого порядку, якщо вона в полярній системі координат задана рівнянням:

а) $\rho = \dfrac{3}{2-5\cos\varphi}$; б) $\rho = \dfrac{9}{3-2\cos\varphi}$; в) $\rho = \dfrac{5}{3\sin^2\frac{\varphi}{2}}$.

4.7.2. Запишіть канонічне рівняння лінії другого порядку, якщо вона в полярній системі координат задана рівнянням:

а) $\rho = \dfrac{2}{3-4\cos\varphi}$; б) $\rho = \dfrac{6}{5-\cos\varphi}$; в) $\rho = \dfrac{2}{7\sin^2\frac{\varphi}{2}}$.

4.7.3. Запишіть рівняння в полярних координатах лінії:

а) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$; б) $\dfrac{x^2}{16} + y^2 = 1$; в) $y^2 = 6x$.

4.7.4. Запишіть рівняння в полярних координатах лінії:

а) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$; б) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$; в) $y^2 = 5x$.

4.7.5. Запишіть рівняння еліпса в полярних координатах, якщо відстань між його фокусами 6, а відстань між вершинами великої осі дорівнює 10.

4.7.6. Запишіть рівняння гіперболи в полярних координатах, якщо відстань між її директрисами 18, а відстань між фокусами дорівнює 32.

4.7.7. Складіть рівняння асимптот і директрис гіперболи $\rho = \dfrac{2}{1-\sqrt{2}\cos\varphi}$.

4.7.8. Обчисліть кут між асимптотами гіперболи $\rho^2 = \dfrac{48}{4\cos^2\varphi - 1}$.

4.7.9. Під яким кутом до фокальної осі еліпса нахилений той діаметр еліпса $\rho^2 = \dfrac{288}{16-7\cos^2\varphi}$, довжина якого 10?

4.7.10. Визначте відстань між директрисами еліпса $\rho = \dfrac{3\sqrt{2}}{2-\cos\varphi}$.

4.7.11.* На параболі $\rho = \dfrac{6}{1-\cos\varphi}$ знайдіть точку з найменшим радіус-вектором.

4.7.12.* На параболі $\rho = \dfrac{4}{1-\cos\varphi}$ знайдіть точку з радіус-вектором, який дорівнює параметру параболи.

4.7.13. Доведіть, що рівності $\begin{cases} x = x_0 + a\cos t \\ y = y_0 + b\sin t \end{cases}$, $a > 0$, $b > 0$ визначають еліпс з центром у точці $(x_0; y_0)$ і півосями a та b.

4.7.14. Доведіть, що рівності $\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{a}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right) \\ y = y_0 + \dfrac{b}{2}\left(t - \dfrac{1}{t}\right) \end{cases}$, $t \neq 0$, $a > 0$, $b > 0$ визначають гіперболу з центром у точці $(x_0; y_0)$ і півосями a та b.

4.7.15. Доведіть, що рівності $\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{t^2}{2p} \\ y = y_0 + t \end{cases}$, $a > 0$, $b > 0$ визначають параболу з вершиною у точці $(x_0; y_0)$, параметром p і напрямом гілок у додатному напрямі осі абсцис.

4.7.16. Запишіть параметричне рівняння еліпса $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$.

4.7.17. Запишіть параметричне рівняння еліпса $\dfrac{(x+3)^2}{36} + \dfrac{(y-4)^2}{49} = 1$.

4.7.18. Запишіть параметричне рівняння гіперболи $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{64} = 1$.

4.7.19. Запишіть параметричне рівняння гіперболи $\dfrac{(x-3)^2}{25} - -\dfrac{(y+1)^2}{16} = 1$.

4.7.20. Запишіть параметричне рівняння параболи $y^2 = 14x$.

4.7.21. Запишіть параметричне рівняння параболи $(x-4)^2 = -6(y+1)$.

4.7.22. Які лінії на площині визначаються такими параметричними рівняннями:

а) $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}, 0 \leqslant t \leqslant \pi$; б) $\begin{cases} x = 1 + 2\cos t \\ y = 2 + 2\sin t \end{cases}, 0 \leqslant t \leqslant \pi$;

в) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \leqslant t \leqslant \pi$; г) $\begin{cases} x = 1 + 5\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}, 0 \leqslant t \leqslant \pi$;

г) $\begin{cases} x = 2 - \dfrac{3}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right) \\ y = -1 + \left(t - \dfrac{1}{t}\right) \end{cases}$?

Відповіді до розділу 4

4.1.1. а) $(x-2)^2+(y+5)^2 = 16$; б) $(x+3)^2+(y-4)^2 = 25$; в) $x^2+(y-4)^2 = 169$. **4.1.2.** а) $(x+1)^2+(y-4)^2 = 9$; б) $(x-6)^2+(y-8)^2 = 100$; в) $(x-4)^2+y^2 = 169$. **4.1.3.** $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 5$. **4.1.4.** $\left(\frac{8}{3}; 0\right)$, $(x - \frac{8}{3})^2 + y^2 = \frac{85}{9}$. **4.1.5.** $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$. **4.1.6.** а) $(4; -3)$, $r = 4$; б) $(-1; 5)$, $r = 5$; в) $(2; 0)$, $r = 2$; г) $(0; -3)$, $r = 4$. **4.1.7.** а) $(0;0)$, $(8;0)$, $(0;-6)$; б) $(3;0)$, $(0;9)$; $(0;1)$;

в) $(2;0)$, $(0;-2)$; г) точок перетину з осями нема. **4.1.8.** $x^2 + (y-2)^2 = 4$. **4.1.9.** $(x-2)^2+(y+3)^2 = 4$, $(x+2)^2+(y+3)^2 = 4$. **4.1.10.** $(30; 48)$, $(-30; 48)$. **4.1.11.** $x - 2y - 5 = 0$. **4.1.12.** $4x + 3y - 35 = 0$. **4.1.13.** $2x - 3y + 9 = 0$. **4.1.14.** $y = 0$, $20x - 21y = 0$. **4.1.15.** $2x - y + 5 = 0$, $2x - y - 5 = 0$. **4.1.16.** $\frac{\pi}{3}$. **4.1.17.** $x^2 + y^2 = 2r^2$. **4.1.18.** $(x-2)^2+(y-2)^2 = 1$, $(x-2,8)^2+(y-0,4)^2 = 1$. **4.1.19.** $\begin{cases} x = 7\cos t \\ y = 7\sin t \end{cases}$. **4.1.20.** $\begin{cases} x = 1 + 2\cos t \\ y = -4 + 2\sin t \end{cases}$.

4.2.1. а) $a = 5$, $b = 2$, $c = \sqrt{21}$, $e = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $F_1(-\sqrt{21}; 0)$, $F_2(\sqrt{21}; 0)$, $x = \pm\frac{25}{\sqrt{21}}$. б) $a = 4$, $b = 2$, $c = 2\sqrt{3}$, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $F_1(-2\sqrt{3}; 0)$, $F_2(2\sqrt{3}; 0)$, $x = \pm\frac{8}{\sqrt{3}}$. **4.2.2.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. **4.2.3.** $\frac{x^2}{\frac{2809}{196}} + \frac{y^2}{\frac{2025}{196}} = 1$. **4.2.4.** $\frac{x^2}{\frac{9}{4}} + \frac{y^2}{1} = 1$. **4.2.5.** $\frac{x^2}{\frac{25}{9}} + \frac{y^2}{\frac{25}{16}} = 1$. **4.2.6.** $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{13} = 1$. **4.2.7.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$. **4.2.8.** $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{15} = 1$. **4.2.9.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. **4.2.10.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{\frac{63}{16}} = 1$. **4.2.11.** $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$. **4.2.12.** $\frac{x^2}{28} + \frac{y^2}{21} = 1$. **4.2.13.** $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$. **4.2.14.** $M_1\left(-\frac{15}{2}; \frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$, $M_1\left(-\frac{15}{2}; -\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$. **4.2.15.** Вершини великої осі. **4.2.16.** $\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$, $F_1(1;3)$, $F_2(9;3)$, $x = \frac{45}{4}$, $x = -\frac{5}{4}$. **4.2.17.** $\frac{(x-7)^2}{49} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$, $F_1(7 - \sqrt{33}; 4)$, $F_2(7 + \sqrt{33}; 4)$, $x = 7 + \frac{49}{\sqrt{33}}$, $x = 7 - \frac{49}{\sqrt{33}}$. **4.2.18.** $\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{\frac{100}{9}} = 1$. **4.2.19.** $\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{\frac{75}{7}} = 1$. **4.2.20.** $\frac{x^2}{12} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$. **4.2.21.** $\frac{(x+2)^2}{18} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$. **4.2.22.** $\frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(y-5)^2}{4} = 1$. **4.2.23.** $\frac{(x-6+\sqrt{30})^2}{(8-\sqrt{30})^2} + \frac{(y-3)^2}{(\sqrt{30}-3)^2} = 1$. **4.2.24.** $\frac{(x+7-2\sqrt{6})^2}{(8-2\sqrt{6})^2} + \frac{(y+2)^2}{(2-2\sqrt{6})^2} = 1$ або $\frac{(x-1)^2}{\frac{100}{9}} + \frac{(y+2)^2}{\frac{64}{9}} = 1$. **4.2.25.** $\frac{(x+3)^2}{6} + \frac{(y-4)^2}{2} = 1$. **4.2.26.** $\frac{(x-3)^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$. **4.2.27.** $\frac{x^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{12} = 1$ або $\frac{x^2}{\frac{16}{9}} + \frac{(y-\frac{5}{3})^2}{\frac{4}{3}} = 1$. **4.2.28.** $\frac{(x+2)^2}{256} + \frac{y^2}{240} = 1$ або $\frac{(x-\frac{22}{5})^2}{\frac{2304}{25}} + \frac{y^2}{\frac{432}{5}} = 1$. **4.2.29.** $5x^2 + 4y^2 - 3xy - 147 = 0$. **4.2.30.** $4x^2 + 4y^2 + xy - 18x - 18y - 90 = 0$. **4.2.31.** $\frac{(x+2)^2}{64} + \frac{(y+1)^2}{39} = 1$. **4.2.32.** $\frac{(x-5)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{20} = 1$. **4.2.33.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{27} = 1$. **4.2.34.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{48} = 1$. **4.2.35.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **4.2.36.** $\frac{2}{\sqrt{10}}$. **4.2.37.** $\frac{1}{2}$. **4.2.38.** $\frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{16} = 1$, формули переходу від нової системи до старої: $\begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{10}}X - \frac{1}{\sqrt{10}}Y - \frac{1}{10} \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}X + \frac{3}{\sqrt{10}}Y + \frac{3}{10} \end{cases}$. **4.2.39.** $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1$, формули переходу від нової системи до старої: $\begin{cases} x = \frac{5}{\sqrt{29}}X - \frac{2}{\sqrt{29}}Y - \frac{5}{29} \\ y = \frac{2}{\sqrt{29}}X + \frac{5}{\sqrt{29}}Y - \frac{2}{29} \end{cases}$. **4.2.40.** $15x^2 + 15y^2 + 2xy - 16x - 16y - 48 = 0$. **4.2.41.** $9x^2 + 9y^2 - 2xy + 20x - 20y - 60 = 0$. **4.2.42.** $68\frac{4}{7}$. **4.2.43.** $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **4.2.44.** $80x^2 - 120xy - 63y^2 - 320 = 0$.

4.3.1. а) $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{13}$, $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$, $F_1(-\sqrt{13}; 0)$, $F_2(\sqrt{13}; 0)$,

$x=\pm\frac{9}{\sqrt{13}}$, $y=\pm\frac{2}{3}x$; б) $a=3$, $b=4$, $c=5$, $e=\frac{5}{3}$, $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$, $x=\pm\frac{9}{5}$, $y=\pm\frac{4}{3}x$; в) $a=4$, $b=3$, $c=5$, $e=\frac{5}{4}$, $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$, $x=\pm\frac{16}{5}$, $y=\pm\frac{3}{4}x$; г) $a=5$, $b=1$, $c=\sqrt{26}$, $e=\frac{\sqrt{26}}{5}$, $F_1(-\sqrt{26};0)$, $F_2(\sqrt{26};0)$, $x=\pm\frac{25}{\sqrt{26}}$, $y=\pm\frac{1}{5}x$. **4.3.2.** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{200}=1$. **4.3.3.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{84}=1$. **4.3.4.** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{21}=1$. **4.3.5.** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$. **4.3.6.** $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{8}=1$. **4.3.7.** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$. **4.3.8.** $\frac{x^2}{90}-\frac{y^2}{10}=1$. **4.3.9.** $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$. **4.3.10.** 9, 19. **4.3.11.** $x=\pm\frac{4}{5}\sqrt{34}$, $y=\pm1{,}8$ (4 точки). **4.3.12.** $x=9{,}6$; $y=\pm\frac{3}{5}\sqrt{119}$ (2 точки). **4.3.13.** $\frac{y^2}{5}-\frac{x^2}{\frac{5}{4}}=1$. **4.3.14.** $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{64}=1$. **4.3.15.** $\frac{\left(x-\frac{57}{35}\right)^2}{\frac{1296}{1225}}-\frac{(y-3)^2}{\frac{1008}{1225}}=1$. **4.3.16.** $\frac{\left(x-\frac{31}{5}\right)^2}{\frac{576}{25}}-\frac{(y-2)^2}{\frac{144}{5}}=1$. **4.3.17.** $\frac{(x-1)^2}{11}-\frac{(y-2)^2}{5}=1$. **4.3.18.** $\frac{(x-1)^2}{3}-\frac{(y+1)^2}{1}=1$. **4.3.19.** $\frac{(x+2)^2}{1}-\frac{y^2}{3}=1$. **4.3.20.** $\frac{\left(x+\frac{13}{8}\right)^2}{\frac{81}{64}}-\frac{y^2}{\frac{81}{8}}=1$; $\frac{(x+2{,}3)^2}{0{,}81}-\frac{y^2}{6{,}48}=1$; **4.3.21.** $\sqrt{2}$. **4.3.22.** 2. **4.3.23.** $\sqrt{10}$. **4.3.24.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$, $\frac{\sqrt{41}}{\sqrt{5}}$. **4.3.25.** $xy-3x-2y+5=0$. **4.3.26.** $xy-x+1=0$. **4.3.27.** $8xy-4x-4y+3=0$. **4.3.28.** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{36}=1$. **4.3.29.** $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{225}=1$. **4.3.30.** $x^2+18xy+y^2-38x-22y-39=0$. **4.3.31.** $x^2-16xy-11y^2+16x+12y+64=0$. **4.3.32.** $\frac{X^2}{25}-\frac{Y^2}{1}=1$, формули переходу від нової системи до старої: $\begin{cases} x=\frac{4}{5}X-\frac{3}{5}Y-\frac{8}{25} \\ y=\frac{3}{5}X+\frac{4}{5}Y-\frac{6}{25}\end{cases}$. **4.3.33.** $\frac{X^2}{16}-\frac{Y^2}{9}=1$, формули переходу від нової системи до старої: $\begin{cases} x=-\frac{1}{\sqrt{2}}X-\frac{1}{\sqrt{2}}Y+1 \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}X-\frac{1}{\sqrt{2}}Y+2\end{cases}$. **4.3.34.** $xy=\frac{1}{2}$, $18xy-12x-12y+7=0$. **4.3.35.** $8xy+4x-12y-7=0$. **4.3.36.** $\frac{x^2}{60}-\frac{y^2}{40}=1$. **4.3.37.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{\frac{16}{15}}=1$. **4.3.38.** 2. **4.3.39.** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$. **4.3.40.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. **4.3.41.** $60x^2+90xy+27y^2+17=0$.

4.4.1. а) $p=4$, $F(2;0)$, $x=-2$; б) $p=4$, $F(-2;0)$, $x=2$; в) $p=5$, $F(\frac{5}{2};0)$, $x=-\frac{5}{2}$; г) $p=5$, $F(-\frac{5}{2};0)$, $x=\frac{5}{2}$. **4.4.2.** $y^2=-4x$. **4.4.3.** $y^2=\frac{4}{3}x$. **4.4.4.** $\left(\frac{2}{3};2\right)$, $\left(\frac{2}{3};-2\right)$. **4.4.5.** $\left(\frac{9}{8};3\right)$, $\left(\frac{9}{8};-3\right)$. **4.4.6.** $(x-1)^2=10(y+\frac{2}{5})$, $(x-1)^2=-10(y-\frac{2}{5})$. **4.4.7.** $(x-1)^2=4(y+4)$, $(x-1)^2=-4(y-4)$. **4.4.8.** $A(18;12)$, $B(18;-12)$. **4.4.9.** $12{,}5$. **4.4.10.** $\left(\frac{5}{6};\pm\sqrt{\frac{25}{3}}\right)$, $\left(\frac{15}{2};\pm\sqrt{75}\right)$. **4.4.11.** $\left(\frac{2}{5};\pm2\right)$. **4.4.12.** $\left(-\frac{5}{4};\pm\sqrt{12{,}5}\right)$. **4.4.13.** $\left(-8;\pm\sqrt{80}\right)$, $\left(-\frac{10}{3};\pm\frac{10}{\sqrt{3}}\right)$. **4.4.14.** $(y-3)^2=2(x+\frac{1}{2})$. **4.4.15.** $(y+2)^2=-8(x-2)$. **4.4.16.** $(x+1)^2=-6(y+\frac{1}{2})$. **4.4.17.** $(x-1)^2=4(y-1)$. **4.4.18.** $x^2-2xy+y^2-40x-40y-80=0$. **4.4.19.** $x^2-2xy+y^2+32x+32y-64=0$. **4.4.20.** $4x^2+4xy+y^2-10x+10y+10=0$. **4.4.21.** $x^2-2xy+y^2+8x+12y+26=0$. **4.4.22.** $x^2=4(y-1)$. **4.4.23.** $(x-3)^2=\pm6\left(y\pm\frac{3}{2}\right)$, $(x+3)^2=\pm6\left(y\pm\frac{3}{2}\right)$. **4.4.24.** 12. **4.4.25.** $2x-y-3=$

0. **4.4.26.** $y^2=-18(x-9)$. **4.4.27.** $x^2=-18(y-12)$. **4.4.28.** $y^2=-72(x-5)$. **4.4.29.** $y^2=24(x+3)$. **4.4.30.** $x^2=40(y+5)$; $x^2=-40(y-5)$. **4.4.31.** $x^2=-\frac{27}{2}(y-6)$; $x^2=\frac{27}{2}(y+6)$. **4.4.32.** $y^2=60(x+5)$. **4.4.33.** $y^2=-64(x-9)$. **4.4.34.** $x^2=\frac{25\sqrt{3}}{3}(y+25\sqrt{3})$; $x^2=-\frac{25\sqrt{3}}{3}(y-25\sqrt{3})$. **4.4.35.** p.

4.5.1. а) $151x^2+6xy+159y^2-320x+640y+800=0$; б) $41x^2-54xy-31y^2+80x-160y-200=0$; в) $x^2+6xy+9y^2-20x+40y+50=0$. **4.5.2.** а) $14x^2-4xy+11y^2-28x+64y+74=0$; б) $3x^2-8xy-3y^2-6x+28y+23=0$; в) $4x^2-4xy+y^2-8x+24y+24=0$. **4.5.3.** $x^2+10xy+25y^2+176x-56y+256=0$. **4.5.4.** $16x^2+8xy+y^2-34x+34y+34=0$. **4.5.5.** а) $x^2+2y^2+4x-68=0$; б) $y^2+12x-84=0$; в) $x^2-y^2-32x+184=0$. **4.5.6.** а) $7x^2-2xy+7y^2-48x-48y+144=0$; б) $x^2+4xy+y^2+6x+6y-18=0$; в) $x^2-2xy+y^2-12x-12y+36=0$. **4.5.7.** парабола. **4.5.8.** $8y^2-6xy-12x+26y+11=0$, $e=\sqrt{10}$, $x-3y-4=0$, $x-3y-6=0$. **4.5.9.** $44x^2+4xy+41y^2-192x+504y-1836=0$. **4.5.10.** $7x^2+4xy+7y^2-34x-74y+112=0$. **4.5.11.** $4x^2-36xy+31y^2-216x+436y+1216=0$, $4x^2-36xy+31y^2-36x+112y-44=0$. **4.5.12.** $x^2+4xy+4y^2+84x-32y-1036=0$. **4.5.13.** Парабола.

4.6.1. $x-2y-8=0$. **4.6.2.** $y=3$, $12x+7y+51=0$. **4.6.3.** $\pm3x\pm4y+15=0$. **4.6.4.** $x\pm y\pm3=0$. **4.6.5.** $x\pm5=0$. **4.6.8.** $x+y-1=0$. **4.6.9.** $3x+2y-6=0$. **4.6.10.** $8x\pm\sqrt{11}y-20=0$. **4.6.11.** $x^2+y^2=a^2-b^2$. **4.6.12.** $(9;-6)$. **4.6.13.** $x+y+2=0$, $2x+5y+25=0$. **4.6.14.** $p=\frac{5}{2}$. **4.6.17.** ab.

4.7.1. а) $\frac{x^2}{\frac{4}{49}}-\frac{y^2}{\frac{3}{7}}=1$; б) $\frac{x^2}{\frac{729}{25}}+\frac{y^2}{\frac{81}{5}}=1$; в) $y^2=\frac{20}{3}x$. **4.7.2.** а) $\frac{x^2}{\frac{36}{49}}-\frac{y^2}{\frac{4}{7}}=1$; б) $\frac{x^2}{\frac{25}{16}}+\frac{y^2}{\frac{3}{2}}=1$; в) $y^2=\frac{8}{7}x$. **4.7.3.** а) $\rho=\frac{4}{3-\sqrt{13}\cos\varphi}$; б) $\rho=\frac{1}{4-\sqrt{15}\cos\varphi}$; в) $\rho=\frac{3}{1-\cos\varphi}$. **4.7.4.** а) $\rho=\frac{9}{4-5\cos\varphi}$; б) $\rho=\frac{9}{5-4\cos\varphi}$; в) $\rho=\frac{5}{2-2\cos\varphi}$. **4.7.5.** $\rho=\frac{16}{5-3\cos\varphi}$. **4.7.6.** $\rho=\frac{28}{3-4\cos\varphi}$. **4.7.7.** Асимптоти: $\rho=\frac{2}{\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)}$, $\rho=\frac{2}{\sin\left(\varphi-\frac{3\pi}{4}\right)}$; директриси: $\rho=-\frac{\sqrt{2}}{\cos\varphi}$, $\rho=-\frac{3\sqrt{2}}{\cos\varphi}$. **4.7.8.** $\frac{2\pi}{3}$. **4.7.9.** $\varphi=\arccos\left(\pm\frac{4}{5}\right)$. **4.7.10.** $8\sqrt{2}$. **4.7.11.** $\left(\frac{3}{2};\pi\right)$ — вершина параболи. **4.7.12.** $\left(2;\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(2;\frac{3\pi}{2}\right)$. **4.7.16.** $\begin{cases} x=4\cos t \\ y=5\sin t\end{cases}$. **4.7.17.** $\begin{cases} x=-3+6\cos t \\ y=4+7\sin t\end{cases}$. **4.7.18.** $\begin{cases} x=4\left(t-\frac{1}{t}\right) \\ y=3\left(t+\frac{1}{t}\right)\end{cases}$. **4.7.19.** $\begin{cases} x=3+\frac{5}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right) \\ y=-1+2\left(t-\frac{1}{t}\right)\end{cases}$. **4.7.20.** $\begin{cases} x=\frac{t^2}{14} \\ y=t\end{cases}$. **4.7.21.** $\begin{cases} x=4+t \\ y=1-\frac{t^2}{6}\end{cases}$. **4.7.22.** а) Частина кола $x^2+y^2=9$, $0\leqslant y\leqslant3$; б) коло $(x-1)^2+(y-2)^2=4$; в) частина кола $x^2+y^2=1$, $0\leqslant y\leqslant1$; г) частина еліпса $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$, $0\leqslant y\leqslant2$; ґ) гіпербола $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{4}=1$.

Розділ 5
Загальна теорія ліній другого порядку

Увесь зміст аналітичної геометрії полягає в тому, що, вибравши (скажімо, на площині) систему координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$, ми заміняємо точки площини парами $(x;y)$ координат цих точок, а лінії задаємо рівняннями вигляду $F(x,y)=0$. Проте зі шкільного курсу алгебри відомо, що дослідження рівнянь другого степеня з однією змінною, якщо при розв'язуванні користуватись лише дійсними числами, є досить неповним. Якщо в аналітичній геометрії обмежитись лише дійсними значеннями координат, то ми не побудуємо повноцінної теорії, оскільки завжди виникатимуть прикрі винятки. Єдиний спосіб цього уникнути — допустити як можливі значення координат точок також і комплексні числа. Отож, ми приходимо до такої конструкції.

Нехай задано звичайну ("дійсну") площину і довільну афінну систему координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$ на ній. Точку M ми ототожнюємо з парою її координат $(x;y)$. Тепер довільну пару $(x;y)$ комплексних чисел будемо вважати точкою комплексної площини, а самі числа $(x;y)$ називатимемо *координатами точки* M комплексної площини стосовно заданої системи координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$. У цьому випадку точка M називається *уявною точкою площини*, якщо хоча б одна з її координат є комплексним недійсним числом.

У цьому розділі, якщо не зазначено іншого, вважаємо, що задано прямокутну систему координат.

5.1. Загальне рівняння лінії другого порядку

Лінією другого порядку називається множина точок площини, координати яких у деякій афінній системі координат задовольняють

рівняння

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0, \qquad (5.1)$$

де хоча б один з коефіцієнтів a_{11}, a_{12}, a_{22} не дорівнює нулю.

Лема 5.1.1. *Для будь-якої лінії другого порядку існує прямокутна система координат, в якій ця лінія має одне з таких рівнянь:*
(I) $Ax^2+By^2+C=0$, *де* $A\neq 0$, $B\neq 0$;
(II) $Ax^2+B=0$, *де* $A\neq 0$;
(III) $Ay^2+Bx=0$, *де* $A\neq 0$.

Рівняння (I) визначає одну з таких ліній:
1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ — еліпс;
2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ — уявний еліпс;
3) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ — гіпербола;
4) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ — дві дійсні прямі, які перетинаються;
5) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ — дві уявні прямі, які перетинаються.
Рівняння (II) визначає параболу:
6) $y^2=2px$.
Рівняння (III) визначає одну з таких ліній:
7) $x^2=a^2$, $a\neq 0$ — дві дійсні паралельні прямі;
8) $x^2=-a^2$, $a\neq 0$ — дві уявні паралельні прямі;
9) $x^2=0$ — дві прямі, що збігаються.

Нехай лінія другого порядку в прямокутній системі координат Oxy визначається загальним рівнянням

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0.$$

Перейдемо до нової прямокутної системи координат $Ox'y'$, повернувши стару систему координат на кут φ за допомогою формул переходу

$$\begin{cases} x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi\\ y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi.\end{cases}$$

Підставивши ці формули в рівняння лінії (5.1), отримуємо

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + \; + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0,$$

де

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi \\ a'_{22} &= a_{11}\sin^2\varphi - 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\cos^2\varphi \\ a'_{12} &= (-a_{11}+a_{22})\cos\varphi\sin\varphi + a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi). \end{aligned}$$

Отже, якщо $a_{12} \neq 0$, то, повертаючи систему координат Oxy на кут φ такий, що

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_{22} - a_{11} \pm \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}},$$

одержимо систему координат $Ox'y'$, в якій рівняння лінії набуває вигляду

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0.$$

Далі за допомогою паралельного перенесення системи координат (у випадку центральної лінії паралельно переносимо систему координат у центр лінії і у випадку параболи, переносимо систему координат у вершину параболи) отримуємо канонічну систему координат і канонічне рівняння лінії.

Приклад 5.1. Шляхом перетворення координат зведіть до канонічного вигляду лінію і знайдіть канонічну систему координат

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 + 6x - 8y + 2 = 0. \tag{5.2}$$

Розв'язання. Повернемо систему координат Oxy проти годинникової стрілки на кут φ, який визначається з формули

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_{22} - a_{11} \pm \sqrt{(a_{22}-a_{11})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}},$$

тобто

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{6 - 9 \pm \sqrt{(6-9)^2 + 4(-2)^2}}{-4}.$$

Звідси $\operatorname{tg}\varphi = 2$ або $\operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{1}{2}$.

Розглянемо $\operatorname{tg}\varphi = 2$. Тоді $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Складаємо формули повороту системи координат на кут φ

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x' - \dfrac{2}{\sqrt{5}}y' \\[2ex] y = \dfrac{2}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}y'. \end{cases} \tag{5.3}$$

Підставивши (5.3) в (5.2) та, виконавши спрощення, отримуємо

$$5x'^2 + 10y'^2 - 2\sqrt{5}x' - 4\sqrt{5}y' + 2 = 0$$

$$5\left(x' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 10\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1.$$

Паралельно перенесемо початок системи координат $Ox'y'$ в точку $O'\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}; \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$, тобто застосуємо формули переходу $\begin{cases} x'' = x' - \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ y'' = y' - \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$ до попереднього рівняння. Отримуємо рівняння $5x''^2 + 10y''^2 = 1$. Отже, канонічне рівняння лінії набуло вигляду

$$\frac{x''^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^2} + \frac{y''^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{10}}\right)^2} = 1.$$

Точка O' в системі координат Oxy має координати

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{5}$$

$$y = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5}.$$

Вісь абсцис $O'x''$ канонічної системи координат $O'x''y''$ стосовно вихідної системи координат має кутовий коефіцієнт $k = \operatorname{tg}\varphi = 2$, а отже, задається рівнянням $y = 2x + b$. Підставивши в це рівняння координати точки O', знайдемо коефіцієнт $b = \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{5} = 1$.

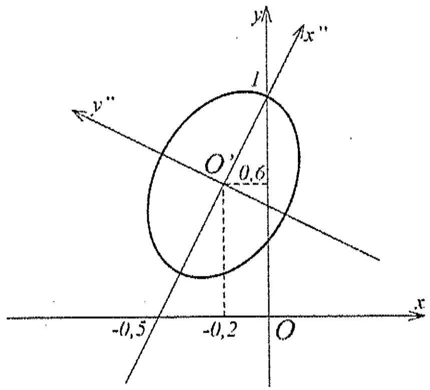


Рис. 33

Тому вісь $O'x''$ має рівняння $y = 2x + 1$ у вихідній системі координат. Вісь $O'y''$ перпендикулярна до осі $O'x''$ і проходить через точку O', тому її рівняння $x + 2y - 1 = 0$ (див. рис. 33).

Приклад 5.2. В афінній системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$, де $|\vec{e}_1| = 5$, $|\vec{e}_2| = 3$, $\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \frac{\pi}{2}$, задано лінію другого порядку рівнянням $x^2 + y^2 = 1$. Знайдіть канонічну систему координат, канонічне рівняння, координати фокусів і рівняння директрис заданої лінії.

Розв'язання. Перейдемо до прямокутної системи координат $O_{\vec{i},\vec{j}}$, де $\vec{i} = \frac{\vec{e}_1}{|\vec{e}_1|} = (\frac{1}{5}; 0)$, вектор $\vec{j} = \frac{\vec{e}_2}{|\vec{e}_2|} = (0; \frac{1}{3})$. Формули переходу від системи координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$ до системи координат $O_{\vec{i},\vec{j}}$ набувають вигляду

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \text{ або } \begin{cases} x = \dfrac{1}{5}x' \\ y = \dfrac{1}{3}y' \end{cases}.$$

Тоді рівняння заданої лінії в прямокутній системі координат $O_{\vec{i},\vec{j}}$ набуває вигляду

$$(\frac{1}{5}x')^2 + (\frac{1}{3}y')^2 = 1 \text{ або } \frac{(x')^2}{25} + \frac{(y')^2}{9} = 1.$$

Отримали канонічне рівняння еліпса, а отже, $O_{\vec{i},\vec{j}}$ є канонічною системою координат для цього еліпса.

Оскільки $c = \sqrt{25 - 9} = 4$, то фокуси еліпса в канонічній системі координат мають координати $F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$. Знайдемо координати фокусів цього еліпса у вихідній системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$. Використовуючи формули переходу, отримуємо, що

$$F_1 = \left(\frac{1}{5} \cdot (-4); \frac{1}{3} \cdot 0\right) = \left(-\frac{4}{5}; 0\right), \; F_2 = \left(\frac{1}{5} \cdot 4; \frac{1}{3} \cdot 0\right) = \left(\frac{4}{5}; 0\right).$$

Оскільки в канонічній системі координат директриси мають рівняння $x' = \pm\frac{25}{4}$, то, використовуючи формули переходу, запишемо рівняння директрис у вихідній системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$:

$$5x = \pm\frac{25}{4}, \text{ або } x = \pm\frac{5}{4}.$$

Вправи

5.1.1. Визначте тип і розташування лінії другого порядку:
- а) $4x^2 + 9y^2 - 8x + 54y + 49 = 0$;
- б) $9x^2 - 4y^2 - 54x - 8y + 113 = 0$;
- в) $y^2 + 6x + 2y - 17 = 0$;
- г) $x^2 - 4x - 7y - 3 = 0$;
- ґ) $4x^2 - 9y^2 - 8x - 36y - 32 = 0$;
- д) $9x^2 - 36x + 11 = 0$;
- е) $-4x^2 + y^2 - 8x - 4y - 1 = 0$.

5.1.2. Визначте тип і розташування лінії другого порядку:
- а) $16x^2 + 5y^2 + 32x + 20y - 44 = 0$;
- б) $25x^2 - y^2 + 150x - 4y + 196 = 0$;
- в) $y^2 - 3x - 4y - 17 = 0$;
- г) $x^2 + 8x + 5y + 16 = 0$;
- ґ) $x^2 - 16y^2 + 8x - 32y = 0$;
- д) $4y^2 + 8y + 53 = 0$;
- е) $-3x^2 + 2y^2 - 12x - 4y - 11 = 0$.

5.1.3. Знайдіть канонічне рівняння, канонічну систему координат, координати фокусів і рівняння директрис лінії другого порядку:
- а) $\dfrac{(x-5)^2}{169} + \dfrac{(y+4)^2}{144} = 1$;

б) $5x^2+9y^2+10x-54y+41=0$;

в) $\dfrac{(x-1)^2}{64}-\dfrac{(y+4)^2}{36}=1$;

г) $xy=1$;

ґ) $xy=-4$;

д) $xy+2x-y-4=0$;

е) $xy-2x+3y-3=0$;

є) $5x^2-4y^2+30x+8y+21=0$;

ж) $y^2=-10x$;

з) $x^2=10y$;

и) $x^2=-10y$;

і) $x^2-6x-4y+29=0$;

ї) $y=-x^2-4x+3$;

й) $5x^2-12xy-2x+6y-3=0$;

к) $x^2-4xy+4y^2+4x-3y-7=0$.

5.1.4. Знайдіть канонічне рівняння, канонічну систему координат, координати фокусів і рівняння директрис лінії другого порядку:

а) $\dfrac{(x+5)^2}{100}+\dfrac{(y-4)^2}{64}=1$;

б) $9x^2+4y^2-18x+16y-11=0$;

в) $\dfrac{(x+2)^2}{25}-\dfrac{(y-3)^2}{144}=1$;

г) $xy=3$;

ґ) $xy=-8$;

д) $xy-x+3y-7=0$;

е) $xy+x-5y+5=0$;

є) $x^2-3y^2+8x+6y+10=0$;

ж) $y^2=-8x$;

з) $x^2=8y$;

и) $x^2=-8y$;

і) $y^2-2x-2y-5=0$;

ї) $x^2+4x+y=0$;

й) $9x^2-4xy+6y^2+16x-8y-2=0$;

к) $9x^2-24xy+16y^2-80x-60y-100=0$.

5.1.5. Шляхом перетворення координат зведіть до канонічного вигляду лінію і знайдіть канонічну систему координат:

а) $5x^2+6xy+5y^2-6x-10y-3=0$;

б) $2xy+3x-y-2=0$;

в) $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$;

г) $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$;

ґ) $9x^2+24xy+16y^2-230x+110y-475=0$;

д) $9x^2-12xy+4y^2-8x=0$;

е) $4x^2-4xy+y^2-6x+3y-4=0$;

є) $2x^2-5xy-12y^2-x+26y-10=0$;

ж) $3x^2+xy-2y^2-5x+5y-2=0$;

з) $4x^2-12xy+9y^2-20x+30y+16=0$.

5.1.6.* В афінній системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$, де $|\vec{e}_1|=2$, $|\vec{e}_2|=1$, $\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=\dfrac{\pi}{2}$ задано рівняння лінії $x^2+y^2=1$. Доведіть, що це рівняння еліпса. Визначте координати фокусів і рівняння директрис цього еліпса в заданій системі координат.

5.1.7.* В афінній системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$, де $|\vec{e}_1|=3$, $|\vec{e}_2|=1$, $\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=\dfrac{\pi}{2}$ задано рівняння гіперболи $\dfrac{x^2}{1}-\dfrac{y^2}{9}=1$. Знайдіть фокуси та рівняння директрис цієї гіперболи в заданій системі координат.

5.1.8.* В афінній системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$, де $|\vec{e}_1|=2$, $|\vec{e}_2|=1$, $\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=\dfrac{\pi}{2}$ задано рівняння параболи $y^2=16x$. Визначте координати фокуса та рівняння директриси цієї параболи в заданій системі координат.

5.1.9.* В афінній системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$, де $|\vec{e}_1|=3$, $|\vec{e}_2|=4$, $\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=\dfrac{\pi}{2}$ задано рівняння параболи $x^2=16y$. Визначте координати фокуса та рівняння директриси цієї параболи в заданій системі координат.

5.2. Перетин лінії другого порядку з прямою. Центр лінії другого порядку. Асимптоти лінії другого порядку

Нехай у деякій афінній системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$ задано лінію другого порядку рівнянням (5.1) і пряму параметричним рівнянням

$$\begin{cases} x=x_0+\alpha t\\ y=y_0+\beta t \end{cases}. \tag{5.4}$$

Знайдемо точки перетину прямої (5.4) та лінії (5.1). Для цього підставимо x та y з рівностей (5.4) в рівняння (5.1), отримуємо рівняння стосовно параметра t, а саме

$$At^2 + 2Bt + C = 0,$$

де

$A = a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2;$

$B = (a_{11}\alpha + a_{12}\beta)x_0 + (a_{12}\alpha + a_{22}\beta)y_0 + a_{13}\alpha + a_{23}\beta;$

$C = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}.$

Можливі такі випадки:

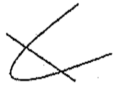


Рис. 34


Рис. 35

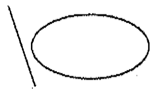


Рис. 36

(I) $A \neq 0$.

а) $B^2 - AC > 0$ — пряма (5.4) перетинає лінію (5.1) в двох різних дійсних точках (див. рис. 34).

б) $B^2 - AC = 0$ — пряма (5.4) перетинає лінію (5.1) в двох точках, що збігаються (див. рис. 35). В цьому випадку ми кажемо, що пряма дотикається до лінії.

в) $B^2 - AC < 0$ — пряма (5.4) перетинає лінію (5.1) в двох уявних комплексно спряжених точках (див. рис. 36).


Рис. 37

(II) $A = 0$.

а) $B \neq 0$ — пряма (5.4) перетинає лінію (5.1) в одній дійсній точці (див. рис. 37).

б) $B = 0$ і $C \neq 0$. Пряма не перетинає лінії.

в) $B = 0$ і $C = 0$. Всі точки прямої (5.4) належать лінії (5.1).

Приклад 5.3. Знайдіть точки перетину прямої $\begin{cases} x = -1 + \alpha t \\ y = \beta t \end{cases}$ з параболою $y^2 = x$.

Розв'язання. Підставимо x та y в рівняння параболи $y^2 = x$, отримуємо

$$\beta^2 t^2 = -1 + \alpha t \text{ або } \beta^2 t^2 - \alpha t + 1 = 0.$$

Обчислимо дискримінант $D = \alpha^2 - 4\beta^2 = \beta^2\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 4\right)$ цього рівняння.

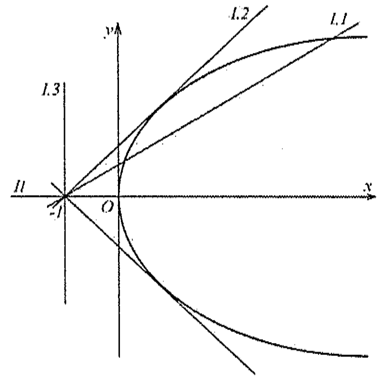


Рис. 38

Можливі такі випадки.

I. Якщо $\beta^2 \neq 0$, тобто $\beta \neq 0$, тоді:

1) при $D > 0$, тобто при $\frac{\alpha}{\beta} \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$ отримаємо дві різні дійсні точки перетину прямої і параболи (див. рис. 38);

2) при $D = 0$, тобто при $\frac{\alpha}{\beta} \in \{-2, 2\}$ пряма перетинає парабоу в двох точках, що збігаються;

3) при $D < 0$, тобто при $\frac{\alpha}{\beta} \in (-2; 2)$ пряма перетинає параболу в двох уявних комплексно спряжених точках.

Наприклад, якщо $\frac{\alpha}{\beta} = 0$, то $\alpha = 0$ і $\beta^2 t^2 = -1$, тобто $t = \pm\frac{1}{\beta}i$, звідки $y = \pm i$, $x = -1$. Комплексно спряженими точками перетину є точки $(-1; i)$ і $(-1; -i)$.

II. Якщо $\beta^2 = 0$, тобто $\beta = 0$, тоді $y = 0$, а це вісь Ox, яка перетинає параболу в вершині.

Напрямок, який задається ненульовим вектором $\vec{p} = (\alpha, \beta)$, називається *асимптотичним напрямком* стосовно лінії другого порядку, яка задана рівнянням (5.1), якщо пряма паралельна до вектора $\vec{p}$, або має з лінією не більше однієї точки перетину, або міститься в цій лінії. Напрямок $\vec{p} = (\alpha; \beta)$ є асимптотичним тоді і тільки тоді, коли його координати задовольняють рівняння

$$a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0. \tag{5.5}$$

Центром лінії другого порядку називається її центр симетрії. Якщо лінія має центр, то його координати визначають з такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0. \end{cases} \tag{5.6}$$

Означення 5.2.1. Лінія другого порядку називається *центральною*, якщо вона має єдиний центр.

Приклад 5.4. Знайдіть координати центра лінії другого порядку, які задано рівнянням

а) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 11 = 0$;

б) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 2 = 0$.

Розв'язання. а) Складаємо систему рівнянь для знаходження центра лінії

$$\begin{cases} 5x + 4y - 9 = 0 \\ 4x + 5y - 9 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримуємо $x = 1$, $y = 1$. Отже, точка $O'(1; 1)$ є центром заданої лінії.

б) Система рівнянь для знаходження центра набуває вигляду

$$\begin{cases} 4x - 6y - 1 = 0 \\ -6x + 9y + \frac{3}{2} = 0. \end{cases}$$

Ця система рівнянь має безліч розв'язків, тобто ми визначили пряму центрів $4x - 6y - 1 = 0$.

Означення 5.2.2. Пряма називається *асимптотою* лінії другого порядку, якщо вона проходить через центр лінії і є паралельною до асимптотичного напрямку.

Твердження 5.2.3. *Пряма є асимптотою лінії другого порядку тоді і тільки тоді, коли вона проходить через центр лінії і не перетинає лінію ні в дійсних, ні в уявних точках, або повністю належить лінії.*

Приклад 5.5. Знайдіть асимптоти лінії $x^2 - 3xy - 10y^2 + 6x - 8y - 10 = 0$.

Розв'язання. Знайдемо асимптотичні напрямки заданої лінії за формулою (5.5) У нашому випадку це рівняння набуває вигляду

$$\alpha^2 - 3\alpha\beta - 10\beta^2 = 0.$$

Очевидно, $\beta \neq 0$. Нехай $\beta = 1$, тоді

$$\alpha^2 - 3\alpha - 10 = 0, \quad \text{звідки } \alpha_1 = -2, \ \alpha_2 = 5.$$

Отже, вектори $\vec{p_1} = (-2; 1)$, $\vec{p_2} = (5; 1)$ мають асимптотичні напрямки.

Знайдемо центр заданої лінії з системи рівнянь:

$$\begin{cases} x - \frac{3}{2}y + 3 = 0 \\ -\frac{3}{2}x - 10y - 4 = 0 \end{cases},$$

а саме $C\left(-\dfrac{144}{49}; \dfrac{2}{49}\right)$. Тоді рівняння асимптот набуватиме вигляду

$$\frac{x + \frac{144}{49}}{-2} = \frac{y - \frac{2}{49}}{1}, \quad \frac{x + \frac{144}{49}}{5} = \frac{y - \frac{2}{49}}{1}.$$

$$7x + 14y + 20 = 0, \ 7x - 35y + 22 = 0.$$

Задача 5.1. Доведіть, що осі системи координат є асимптотами лінії тоді і тільки тоді, коли ця лінія задається рівнянням $xy + \lambda = 0$ у цій системі координат.

Розв'язання. Припустимо, що осі Ox і Oy є асимптотами лінії (5.1). Оскільки початок координат O збігається з точкою перетину асимптот, то він є центром лінії, а отже, його координати задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0. \end{cases}$$

Підставивши координати $(0;0)$ в цю систему, ми отримуємо $a_{13} = 0$ і $a_{23} = 0$. Напрямні вектори осей $\vec{e}_1(1;0)$ і $\vec{e}_2(0;1)$ мають асимптотичні напрямки, тобто

$$a_{11}\cdot 1 + 2a_{12}\cdot 1\cdot 0 + a_{22}\cdot 0 = 0$$
$$a_{11}\cdot 0 + 2a_{12}\cdot 0\cdot 1 + a_{22}\cdot 1 = 0.$$

З цих рівнянь одержуємо, що $a_{11} = a_{22} = 0$.

Отже, рівняння лінії набуває вигляду

$$2a_{12}xy + a_{33} = 0 \text{ або } xy + \lambda = 0.$$

Очевидно таке: якщо лінія має рівняння $xy+\lambda = 0$, то осі системи координат є асимптотами.

Задача 5.2. Доведіть таке: якщо лінія другого порядку має прямі $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ своїми асимптотами, то її рівняння набуває вигляду

$$(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) + \lambda = 0.$$

Розв'язання. Зафіксуємо нову систему координат $O'x'y'$, осі якої збігаються з асимптотами лінії. Формули переходу будуть такими:

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = a_2x + b_2y + c_2. \end{cases} \tag{5.7}$$

У новій системі координат рівняння лінії другого порядку набуває вигляду $x'y' + \lambda = 0$ (див. задачу 5.1).

Повернувшись, за допомогою формул (5.7) до старої системи координат, отримуємо, що лінія має рівняння

$$(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) + \lambda = 0.$$

Приклад 5.6. Лінія другого порядку проходить через точку $A(1;-1)$ і прямі $2x+3y-5=0$ і $5x+3y-8=0$ є її асимптотами. Запишіть рівняння цієї лінії.

Розв'язання. Рівняння цієї лінії набуває вигляду

$$(2x+3y-5)(5x+3y-8)+\lambda = 0.$$

Позаяк точка $A(1;-1)$ належить цій лінії, то

$$(2-3-5)(5-3-8)+\lambda = 0.$$

Звідси $\lambda = -36$. Отож, лінія задається рівнянням

$$(2x+3y-5)(5x+3y-8)-36 = 0$$

$$\text{або } 10x^2 + 21xy + 9y^2 - 41x - 39y + 4 = 0.$$

Вправи

5.2.1. Знайдіть асимптотичні напрямки ліній другого порядку:
- а) $3x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 10y + 14 = 0$;
- б) $10xy - 2y^2 + 6x + 4y - 21 = 0$;
- в) $-2xy + 4x + y - 5 = 0$;
- г) $5xy + 4y - 1 = 0$;
- ґ) $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y - 3 = 0$;
- д) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 6x - 8y + 2 = 0$;
- е) $8x^2 + 10xy - 3y^2 + 6x + 16y - 5 = 0$;
- є) $x^2 - 8xy + 16y^2 + 4x - 16y + 4 = 0$.

5.2.2. Визначте центр ліній другого порядку:
- а) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 5 = 0$;
- б) $2x^2 - 3xy - y^2 + 3x + 2y = 0$;
- в) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y - 11 = 0$;
- г) $x^2 + 6xy + 9y^2 + 4x + 12y - 1 = 0$;
- ґ) $x^2 - 16y^2 + 8x - 32y = 0$;
- д) $4y^2 + 8y + 53 = 0$.

5.2.3. Знайдіть асимптоти ліній другого порядку:
- а) $5x^2 + 12xy - 2x - 12y - 1 = 0$;
- б) $6xy + 12x - 3y + 5 = 0$;
- в) $3x^2 + 7xy + 4y^2 + 5x + 2y - 6 = 0$;

г) $2x^2 + 6xy - 12x - 18y + 5 = 0$.

5.2.4. Прямі $5x - y = 0$ і $x - y + 2 = 0$ є асимптотами гіперболи. Запишіть рівняння гіперболи, якщо гіпербола проходить через точку $A(-1; 0)$.

5.2.5. Прямі $4x - y = 0$ і $x + y + 1 = 0$ є асимптотами гіперболи. Запишіть рівняння гіперболи, якщо гіпербола проходить через точку $A(0; 1)$.

5.2.6. Складіть рівняння гіперболи, якщо прямі $x - 2y = 0$ і $3x + 2y - 8 = 0$ є, відповідно, її віссю та асимптотою і точка $A(-1; 0)$ належить гіперболі.

5.2.7. Складіть рівняння гіперболи, якщо прямі $x - 3y + 6 = 0$ і $2x - y + 5 = 0$ є, відповідно, її віссю та асимптотою і точка $A(0; 1)$ належить гіперболі.

5.2.8. Запишіть рівняння гіперболи, для якої точка $F(-2; 2)$ є фокусом, а прямі $2x - y + 1 = 0$ і $x + 2y - 7 = 0$ — асимптотами.

5.2.9. Запишіть рівняння гіперболи, для якої точка $F(0; -1)$ є фокусом, а прямі $x - 2y = 0$ і $x + 2y + 4 = 0$ — асимптотами.

5.2.10. Приймаючи за нові осі системи координат асимптоти гіперболи, запишіть рівняння гіперболи в новій системі координат:

а) $2xy - 6x + 4y - 1 = 0$;

б) $xy + 2x - 5y - 6 = 0$.

5.2.11.* Доведіть, що дві гіперболи мають ті самі асимптоти тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти їхніх загальних рівнянь (за винятком, можливо, вільних членів) є пропорційними.

5.3. Діаметри лінії другого порядку. Спряжені напрямки та спряжені діаметри лінії другого порядку

Множина середин всіх хорд лінії другого порядку (5.1), які паралельні до деякого неасимптотичного напрямку $\vec{p} = (\alpha; \beta)$, є пряма, яка називається *діаметром* лінії *спряженим* до напрямку $\vec{p}$ і цей діаметр задається рівнянням

$$d_{\vec{p}}: \quad (a_{11}\alpha + a_{12}\beta)x + (a_{21}\alpha + a_{22}\beta)y + a_{13}\alpha + a_{23}\beta = 0. \qquad (5.8)$$

Якщо діаметр $d_{\vec{p}}$ неасимптотичного напрямку $\vec{p}$ є множиною середин хорд, які паралельні до діаметра $d_{\vec{q}}$, то $d_{\vec{q}}$ — множина середин хорд, які паралельні до діаметра $d_{\vec{p}}$. Такі діаметри називаються

спряженими. Якщо $\vec{p}$ має координати $(\alpha_1; \beta_1)$, а $\vec{q}$ має координати $(\alpha_2; \beta_2)$, то діаметри $d_{\vec{p}}$ і $d_{\vec{q}}$ спряжені тоді і тільки тоді, коли координати векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$ задовольняють рівняння

$$(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\beta_1)\alpha_2 + (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\beta_1)\beta_2 = 0 \qquad (5.9)$$

або

$$a_{11}\alpha_1\alpha_2 + a_{12}\beta_1\alpha_2 + a_{21}\alpha_1\beta_2 + a_{22}\beta_1\beta_2 = 0.$$

Приклад 5.7. Лінію другого порядку задано рівнянням $x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 14y - 7 = 0$. Запишіть рівняння діаметра цієї лінії, який:

а) проходить через початок координат;

б) спряжений до хорд, паралельних до осі Ox;

в) утворює кут 45^0 зі спряженими хордами;

г) перпендикулярний до спряжених з ним хорд.

Система координат прямокутна.

Розв'язання. Загальний вигляд діаметра заданої лінії, спряженого до симетричного напрямку $\vec{p} = (\alpha; \beta)$, задається рівнянням

$$(\alpha - 3\beta)x + (-3\alpha + 9\beta)y - 6\alpha + 7\beta = 0.$$

Задача полягає в тому, щоб із заданих умов *а, б, в, г* знайти відповідний напрямок $\vec{p} = (\alpha; \beta)$.

а) Координати $(0; 0)$ початку координат мають задовольняти рівняння діаметра, тобто $-6\alpha + 7\beta = 0$. Нехай $\beta = 6$, тоді $\alpha = 7$. Підставивши ці значення в рівняння діаметра, отримуємо

$$-11x + 33y = 0 \quad \text{або} \quad x - 3y = 0.$$

б) Зрозуміло, що вектори $\vec{p} = (\alpha; \beta)$, $\vec{i} = (1; 0)$ колінеарні. Підставивши $\alpha = 1$ і $\beta = 0$ в рівняння діаметра, отримуємо

$$x - 3y - 6 = 0.$$

в) Напрямний вектор діаметра задається координатами

$$(3\alpha - 9\beta; \alpha - 3\beta).$$

Очевидно, цей вектор колінеарний вектору $\vec{q} = (3; 1)$, а він утворює кут $45°$ з вектором $\vec{p} = (\alpha; \beta)$.

Тому $\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|} = \cos 45^\circ$ або $\frac{3\alpha+\beta}{\sqrt{10}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв'язавши це рівняння, отримуємо вектори $\vec{p_1} = (-2;1)$ і $\vec{p_2} = (1;2)$. Тоді шукані діаметри задаються рівняннями

$$\begin{cases} d_{p_1}: \ 5x - 15y - 19 = 0 \\ d_{p_2}: \ 5x - 15y - 8 = 0. \end{cases}$$

г) Позаяк діаметр перпендикулярний до спряжених з ним хорд, то $\vec{p}\cdot\vec{q} = 0$, де $\vec{q} = (3;1)$ напрямний вектор діаметра. Розв'язавши рівняння $3\alpha + \beta = 0$, отримуємо вектор $\vec{p}' = (1;-3)$.

Отож, шуканий діаметр задається рівнянням

$$d_p: \ 10x - 30y - 27 = 0.$$

Приклад 5.8. Знайдіть діаметр лінії $4xy - 5y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$, який:

а) паралельний до прямої $2x + y + 7 = 0$;

б) перпендикулярний до прямої $x - 3y + 1 = 0$.

Система координат прямокутна.

Розв'язання. Всі діаметри заданої лінії набувають вигляду

$$2\beta x + (2\alpha - 5\beta)y + \alpha + 3\beta = 0, \tag{5.10}$$

де $\vec{p} = (\alpha;\beta)$ неасимптотичний напрямок, спряжений до діаметра.

Для розв'язання нам достатньо знайти відповідний неасимтотичний напрямок $\vec{p} = (\alpha;\beta)$, з яким шуканий діаметр спряжений. Напрямний вектор діаметра (5.10) має координати $(-2\alpha + 5\beta; 2\beta)$.

а) Оскільки діаметр паралельний до прямої $2x + y + 7 = 0$, то його напрямний вектор має бути колінеарним до напрямного вектора $(-1;2)$ заданої прямої. З умови колінеарності отримаємо: $\frac{-2\alpha+5\beta}{-1} = \frac{2\beta}{2}$, або $-\alpha + 3\beta = 0$. Нехай $\beta = 1$, тоді $\alpha = 3$. Підставивши ці значення в рівняння (5.10), отримуємо рівняння $2x + y + 6 = 0$ шуканого діаметра.

б) Оскільки діаметр перпендикулярний до прямої $x - 3y + 1 = 0$, то його напрямний вектор має бути перпендикулярним до напрямного вектора $(3;1)$ заданої прямої. Отже, скалярний добуток напрямного вектора діаметра $(-2\alpha + 5\beta; 2\beta)$ і вектора $(3;1)$ дорівнює нулю. Позаяк система координат прямокутна, то

$$3(-2\alpha + 5\beta) + 2\beta = 0, \text{ або } -6\alpha + 17\beta = 0.$$

Нехай $\beta = 6$, тоді $\alpha = 17$. Підставивши ці значення в рівняння (5.10), отримуємо рівняння $12x + 4y + 35 = 0$ шуканого діаметра.

Приклад 5.9. Напишіть рівняння еліпса, в якого центр розташований у точці $C(2;1)$, а прямі $y - 2 = 0$, $x - y = 0$ дотикаються до нього в кінцях двох спряжених діаметрів.

Розв'язання. Оскільки прямі $y - 2 = 0$ та $x - y = 0$ дотикаються до еліпса в кінцях двох спряжених діаметрів, то задані прямі є паралельними до цих спряжених діаметрів. Враховуючи, що кожен діаметр проходить через центр лінії, отримуємо рівняння $y - 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$ цих діаметрів.

Знайдемо координати точок перетину діаметрів з відповідними дотичними. Якщо $\begin{cases} x - y = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$, то отримуємо точку $A(1;1)$; якщо $\begin{cases} y - 2 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$, то точку $B(3;2)$. Ці точки належать еліпсу. Нехай еліпс задається рівнянням (5.1), тоді координати точок A і B задовольнять це рівняння, тобто

$$a_{11} + 2a_{12} + a_{22} + 2a_{13} + 2a_{23} + a_{33} = 0,$$

$$9a_{11} + 12a_{12} + 4a_{22} + 6a_{13} + 4a_{23} + a_{33} = 0.$$

Напрямні вектори $\vec{p} = (1;0)$ і $\vec{q} = (1;1)$ діаметрів є спряженими напрямками, тому їхні координати задовольняють рівняння (5.9)

$$(a_{11}\cdot 1 + a_{12}\cdot 0)\cdot 1 + (a_{12}\cdot 1 + a_{22}\cdot 0)\cdot 1 = 0, \text{ або } a_{11} + a_{12} = 0.$$

Точка C є центром еліпса, тому її координати задовольняють систему рівнянь (5.6), яка в цій задачі набуває вигляду

$$\begin{cases} 2a_{11} + a_{12} + a_{13} = 0 \\ 2a_{12} + a_{22} + a_{23} = 0 \end{cases}.$$

Об'єднавши попередні рівняння в одну систему з п'яти рівнянь з шістьма невідомими

$$\begin{cases} a_{11} + 2a_{12} + a_{22} + 2a_{13} + 2a_{23} + a_{33} = 0 \\ 9a_{11} + 12a_{12} + 4a_{22} + 6a_{13} + 4a_{23} + a_{33} = 0 \\ a_{11} + a_{12} = 0 \\ 2a_{11} + a_{12} + a_{13} = 0 \\ 2a_{12} + a_{22} + a_{23} = 0 \end{cases},$$

і розв'язавши її, отримуємо $a_{11} = a_{33}$, $a_{12} = a_{13} = -a_{33}$, $a_{22} = 2a_{33}$, $a_{23} = 0$. Приймемо $a_{33} = 1$, тоді рівняння еліпса набуде вигляду

$$x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 1 = 0.$$

Вправи

5.3.1. Знайдіть діаметр лінії $2x^2 - 4xy - 5y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$, який:
а) проходить через точку $A(-2;1)$;
б) перпендикулярний до прямої $x + y + 1 = 0$;
в) паралельний до прямої $x + y + 1 = 0$.

5.3.2. Знайдіть діаметр лінії $6xy + y^2 + 3x - 4y + 5 = 0$, який:
а) проходить через точку $A(-1;3)$;
б) перпендикулярний до прямої $2x - y + 3 = 0$;
в) паралельний до прямої $2x - y + 3 = 0$.

5.3.3. Лінію другого порядку задано рівнянням $x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 14y - 7 = 0$. Запишіть рівняння діаметра цієї лінії, який:
а) проходить через початок координат;
б) спряжений до хорд, паралельних до осі Ox;
в) утворює кут 45^0 зі спряженими хордами;
г) перпендикулярний до спряжених з ним хорд.

5.3.4. Лінію другого порядку задано рівнянням $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$. Запишіть рівняння діаметра цієї лінії, який:
а) проходить через початок координат;
б) спряжений до хорд, паралельних до осі Oy;
в) утворює кут 45^0 зі спряженими хордами;
г) перпендикулярний до спряжених з ним хорд.

5.3.5. Напишіть рівняння двох спряжених діаметрів гіперболи $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{12} = 1$, один з яких проходить через точку $A(2;1)$.

5.3.6. Лінію другого порядку задано рівнянням $4xy - 5y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$. Знайдіть спряжені діаметри цієї лінії, якщо один з них паралельний до прямої $3x - y + 4 = 0$.

5.3.7. Лінію другого порядку задано рівнянням $3x^2 - 2xy + 5y - 1 = 0$. Знайдіть спряжені діаметри цієї лінії, якщо один з них паралельний до прямої $x - 2y + 1 = 0$.

5.3.8. Побудуйте еліпс $x^2 + 4y^2 = 16$, діаметр $y = \frac{x}{2}$ і спряжений до нього діаметр. Знайдіть довжини цих діаметрів.

5.3.9. Побудуйте гіперболу $x^2 - 4y^2 = 4$, діаметр $y = -x$ і спряжений до нього діаметр. Знайдіть кут між цими діаметрами.

5.3.10. Знайдіть множину точок, які є серединами хорд гіперболи $x^2 - 2y^2 = 1$, що паралельні до прямої $2x - y = 0$.

5.3.11. Запишіть рівняння діаметра еліпса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$, який проходить через середину хорди, що відтинається еліпсом на прямій $3x + 2y - 6 = 0$.

5.3.12. Знайдіть спряжені діаметри еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ однакової довжини. Чому дорівнює їхня довжина?

5.3.13. Запишіть рівняння двох спряжених діаметрів гіперболи $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{12} = 1$, один з яких проходить через точку $(2;1)$.

5.3.14. Задано дві лінії другого порядку $3x^2 + 6xy - y^2 - 18x - 10y = 0$, $9x^2 + 6xy + y^2 - 18x - 10y + 0$. Знайдіть спільний діаметр цих двох ліній і напрямки тих хорд кожної з заданих двох ліній, яким спряжений шуканий діаметр.

5.3.15. Знайдіть діаметри, які спряжені одночасно стосовно двох ліній $x^2 + 2xy - y^2 = 1$, $x^2 - 10xy + 4y^2 = 1$.

5.3.16. Складіть рівняння лінії другого порядку, якщо вона проходить через початок координат, а прямі $x - 3y - 2 = 0$, $5x - 5y - 4 = 0$ та $5y + 3 = 0$, $2x - y - 1 = 0$ — попарно спряжені діаметри.

5.3.17. Складіть рівняння лінії другого порядку, якщо вона проходить через точку $(1;1)$, а прямі $2x - 3y = 0$, $x + 2y = 0$ та $x - y = 0$, $3x - 5y = 0$ — попарно спряжені діаметри.

5.3.18.* Запишіть рівняння еліпса, якщо центр його розміщений у точці $C(2;1)$ і прямі $y - 3 = 0$, $x + y - 6 = 0$ дотикаються до нього в кінцях двох спряжених діаметрів.

5.3.19.* Три послідовні вершини паралелограма $ABCD$ містяться в точках $A(4;0)$, $B(0;0)$, $C(2;2)$. Запишіть рівняння еліпса, який вписано в цей паралелограм, якщо еліпс дотикається до сторони AB в середині цієї сторони.

5.3.20. Запишіть рівняння еліпса, якщо його центр міститься в точці $(2;1)$ і прямі $y - 2 = 0$ та $x - y = 0$ — дотичні до еліпса в кінцях двох спряжених діаметрів цього еліпса.

5.3.21.* У трикутнику ABC вершини мають координати $A(6;0)$,

$B(0;4), C(6;4)$. Запишіть рівняння лінії другого порядку, якщо центр цієї лінії розташований у точці $(4;3)$ і вона описана навколо цього трикутника.

5.3.22.* Доведіть, що діагоналі паралелограма описаного навколо еліпса лежать на спряжених діаметрах.

5.4. Головні діаметри лінії другого порядку

Діаметр лінії другого порядку називається *головним*, якщо він перпендикулярний до спряжених з ним хорд.

Очевидно, що діаметр лінії є головним тоді і тільки тоді, коли координати спряженого з ним напрямку задовольняють рівняння

$$(a_{11}\alpha + a_{12}\beta)\beta - (a_{21}\alpha + a_{22}\beta)\alpha = 0. \tag{5.11}$$

Головний діаметр лінії другого порядку є її віссю симетрії. Інколи головні діаметри називають *головними осями* лінії другого порядку.

Приклад 5.10. Запишіть рівняння осей ліній:

а) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$;

б) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 5x + 10y + 6 = 0$.

Розв'язання. Очевидно, головні діаметри є осями лінії другого порядку. Знайдемо головні діаметри цієї лінії. Для цього знайдемо головні напрямки за формулою (5.11).

У випадку *а* це рівняння набуває вигляду

$$(5\alpha + 4\beta)\beta - (4\alpha + 5\beta)\alpha = 0.$$

Зрозуміло, що $\beta \neq 0$. Нехай $\beta = 1$. Тоді отримаємо $4\alpha^2 - 4 = 0$. Звідси $\alpha = \pm 1$.

Отже, головними напрямками лінії будуть будь-які ненульові вектори, які колінеарні до векторів $\vec{p_1} = (1;1)$ і $\vec{p_2} = (-1;1)$. Шукані діаметри є діаметрами, спряженими до цих напрямків

$$d_{\vec{p_1}} : \ x + y - 2 = 0$$

$$d_{\vec{p_2}} : \ x - y = 0.$$

У випадку *б* рівняння для знаходження головних напрямків набуває вигляду

$$(\alpha - 2\beta)\beta - (-2\alpha + 4\beta)\alpha = 0.$$

Зрозуміло, що $\beta \neq 0$. Нехай $\beta = 1$. Тоді одержимо

$$2\alpha^2 - 3\alpha - 2 = 0.$$

Звідси $\alpha_1 = -\dfrac{1}{2}$, $\alpha_2 = 2$.

Отож, головними напрямками є будь-які ненульові вектори, які колінеарні до векторів $\vec{p_1} = (-1;2)$ і $\vec{p_2} = (2;1)$. Напишемо рівняння діаметрів, які відповідають цим напрямкам

$$d_{\vec{p_1}} : \ -5x + 10y + \frac{5}{2} + 10 = 0$$

$$d_{\vec{p_2}} : \ 0x + 0y - \frac{5}{2} + 5 = 0.$$

Очевидно, друге рівняння не є рівнянням прямої. Тому лінія має єдиний головний діаметр $2x - 4y - 5 = 0$.

Приклад 5.11. Зведіть лінію другого порядку $2x^2 - 12xy - 7y^2 + 8x + 6y = 0$ до головних осей.

Розв'язання. З системи рівнянь $\begin{cases} 2x - 6y + 4 = 0 \\ -6x - 7y + 3 = 0 \end{cases}$ визначимо центр лінії $C\left(-\dfrac{1}{5}; \dfrac{3}{5}\right)$ і перенесемо початок системи координат у центр лінії, застосувавши формули паралельного перенесення $\begin{cases} x' = x + \dfrac{1}{5} \\ y' = y - \dfrac{3}{5} \end{cases}$. Після спрощень рівняння лінії набуде вигляду

$$2x'^2 - 12x'y - 7y'^2 + 1 = 0.$$

З рівняння $2\alpha^2 + 3\alpha\beta - 2\beta^2 = 0$ знаходимо головні напрямки $\vec{p_1} = (-2;1)$, $\vec{p_2} = (1;2)$. Вектор $\vec{p_2}$ утворює з віссю абсцис кут φ, тангенс якого $\operatorname{tg}\varphi = 2$. Повернемо осі координат на кут φ. Для цього запишемо формули переходу

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x'' - \dfrac{2}{\sqrt{5}}y'' \\ y' = \dfrac{2}{\sqrt{5}}x'' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}y'' \end{cases}$$

і підставимо їх у рівняння лінії, перенесеної в центр. Отримуємо рівняння $10x''^2 - 5y''^2 = 1$ лінії, зведеної до головних осей.

Вправи

5.4.1. Запишіть рівняння осей лінії другого порядку:

а) $5x^2 + 4xy + 8y^2 + x - 4 = 0$;

б) $-6xy + 2x - y = 0$;

в) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 3y = 0$;

г) $x^2 + 2xy + y^2 + x + 6y - 5 = 0$;

ґ) $5x^2 + 24xy - 2y^2 + 4x - 1 = 0$;

д) $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 6x - 2y - 5 = 0$.

5.4.2. Знайдіть вершину і вісь параболи:

а) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$;

б) $9x^2 - 12xy + 4y^2 - 8x = 0$.

5.4.3. Зведіть лінію другого порядку до головних осей:

а) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 6x - 8y + 2 = 0$;

б) $32x^2 + 60xy + 7y^2 - 16x - 2y + 1 = 0$;

в) $2xy + 3x - y - 2 = 0$;

г) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$.

5.4.4.* Знайдіть умови, за яких дві центральні лінії другого порядку $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a = 0$ та $b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + b = 0$ мають ті самі осі симетрії.

5.5. Метод ортогональних інваріантів зведення лінії другого порядку до канонічного вигляду

Означення 5.5.1. Функція $f(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33})$ від коефіцієнтів полінома $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$ називається *ортогональним інваріантом*, якщо значення цієї функції залишається незмінним при переході від заданої прямокутної системи

координат до будь-якої іншої прямокутної системи координат, тобто якщо:

$$f(a'_{11}, a'_{12}, a'_{22}, a'_{13}, a'_{23}, a'_{33}) = f(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}),$$

де $a'_{11}, a'_{12}, a'_{22}, a'_{13}, a'_{23}, a'_{33}$ — коефіцієнти полінома $a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33}$, який ми отримали з вихідного полінома внаслідок переходу від однієї системи координат до іншої.

Теорема 5.5.2. *Функції*

$$s = I_1 = a_{11} + a_{22},$$

$$\delta = I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\Delta = I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

є ортогональними інваріантами лінії другого порядку, яка визначена рівнянням (5.1).

Отже, якщо $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ — рівняння лінії другого порядку в одній прямокутній системі координат, а $a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0$ рівняння цієї самої лінії, яке одержали внаслідок переходу до іншої прямокутної системи координат, то

$$s = I_1 = a_{11} + a_{22} = a'_{11} + a'_{22},$$

$$\delta = I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix},$$

$$\Delta = I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix}.$$

Для визначення типу лінії другого порядку зручно користуватись такою табличкою:

	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
$\delta > 0$	Еліпс	Дві уявні прямі, що перетинаються в дійсній точці
$\delta = 0$	Парабола	Паралельні прямі (дійсні, уявні або ті, що збігаються)
$\delta < 0$	Гіпербола	Дві дійсні прямі, що перетинаються

Лінії другого порядку можна розбити на три групи. До першої групи належать всі центральні лінії. До другої групи належать лінії, які не мають центра, а це насправді парабола. До третьої групи зачисляють лінії, центри яких утворюють пряму.

Якщо лінія $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ належить до першої групи, то існує прямокутна система координат $O'x'y'$, в якій рівняння цієї лінії набуває вигляду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0,$$

де λ_1, λ_2 — корені характеристичного рівняння $\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$.

Систему координат $O'x'y'$ визначають так: початок O' розташований у центрі лінії, тобто його координати знаходимо з системи рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0, \end{cases}$$

а кутовий коефіцієнт осі $O'x'$ (якщо $a_{12} \neq 0$) — з формули

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}. \tag{5.12}$$

Вісь $O'y'$ є перпендикулярною прямою до осі $O'x'$ і проходить через центр лінії O'.

Лінія належить до другої групи, тобто є параболою, тоді і тільки тоді, коли $I_2 = 0$ і $I_3 \neq 0$.

За допомогою перетворення прямокутної системи координат рівняння лінії другої групи, тобто параболи, зводиться до вигляду

$$I_1 y'^2 = 2\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}x'.$$

Розташування параболи стосовно початкової системи координат буде відоме, якщо знайдемо координати вершини і вісь параболи. Для цього треба знайти головний діаметр параболи, він і буде віссю параболи і відразу ж і віссю абсцис $O'x'$ канонічної системи координат. Для знаходження вершини параболи O', яка є центром канонічної системи координат, потрібно вісь параболи перетнути з самою параболою, тобто розв'язати систему рівнянь, яка складається з рівняння осі параболи і рівняння самої параболи стосовно початкової системи координат. Одиничний напрямний вектор осі абсцис канонічної системи координат напрямлений у бік вгнутості параболи і при $I_1 > 0$ виражається рівнянням $a_{11}\alpha + a_{12}\beta = 0$ та нерівністю $a_{13}\alpha + a_{23}\beta < 0$.

Визначимо число

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Це число K називається *ортогональним півінваріантом* — воно не змінюється у всіх прямокутних декартових системах координат (зі спільним початком систем координат) при повороті системи координат на деякий кут.

Твердження 5.5.3. *Якщо $I_2 = I_3 = 0$, то K є ортогональним інваріантом.*

Якщо лінія другого порядку розпадається на пару паралельних прямих, а це можливо тоді і тільки тоді, коли $I_2 = I_3 = 0$, то за допомогою перетворення прямокутної системи координат рівняння лінії третьої групи зводиться до вигляду

$$y'^2 + \frac{K}{I_1^2} = 0.$$

Канонічну систему координат $O'x'y'$ знаходимо так: вісь $O'x'$ збігається з лінією центрів, початок канонічної системи координат O' можна вибирати довільно на осі абсцис (на лінії центрів), а вісь $O'y'$ буде перпендикулярною до осі абсцис і проходитиме через точку O'.

Якщо лінія другого порядку розпадається на пару прямих, тобто, коли $I_3 = 0$, то зручно користуватися методом Лагранжа. Цей метод дає змогу зображати рівняння лінії другого порядку у вигляді добутку двох лінійних рівнянь. В інших випадках не варто користуватися методом Лагранжа, оскільки отримане рівняння не буде канонічним внаслідок неортогональних перетворень.

Приклад 5.12. Нехай лінія другого порядку задана рівнянням $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$ в прямокутній системі координат. За допомогою ортогональних інваріантів знайдіть:

а) канонічне рівняння та канонічну систему координат лінії;

б) координати фокусів і рівняння директрис лінії.

Розв'язання. а) Обчислимо ортогональні інваріанти I_1, I_2, I_3

$$I_1 = 8,\ I_2 = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -9 < 0,\ I_3 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 8 & -13 \\ -6 & -13 & 11 \end{vmatrix} = 81.$$

Позаяк $I_2 < 0$ і $I_3 \neq 0$, то лінія є гіперболою. Знайдемо корені її характеристичного рівняння

$\lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0$

$\lambda_1 = 9, \lambda_2 = -1.$

Тоді задане рівняння набуває вигляду $9x'^2 - y'^2 + \dfrac{81}{-9} = 0$, а канонічне рівняння

$$x'^2 - \frac{y'^2}{9} = 1.$$

Запишемо систему рівнянь для знаходження центра:

$$\begin{cases} 3y - 6 = 0 \\ 3x + 8y - 13 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знаходимо координати $(-1; 2)$ центра O'.

Кутовий коефіцієнт осі $O'x'$ дорівнює

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{9}{3} = 3.$$

Тоді рівняння осі $O'x'$ набуде вигляду $y = 3x + b$. Підставивши у це рівняння координати точки $O'(-1; 2)$, отримуємо, що $b = 5$. Отже, вісь $O'x'$ у системі координат Oxy задається рівнянням: $y = 3x + 5$. Вісь $O'y'$ перпендикулярна до осі $O'x'$ і проходить через точку O'. Звідси знаходимо, що рівняння осі $O'y'$ в системі координат Oxy набуває вигляду $x + 3y - 5 = 0$ (див. рис. 39).

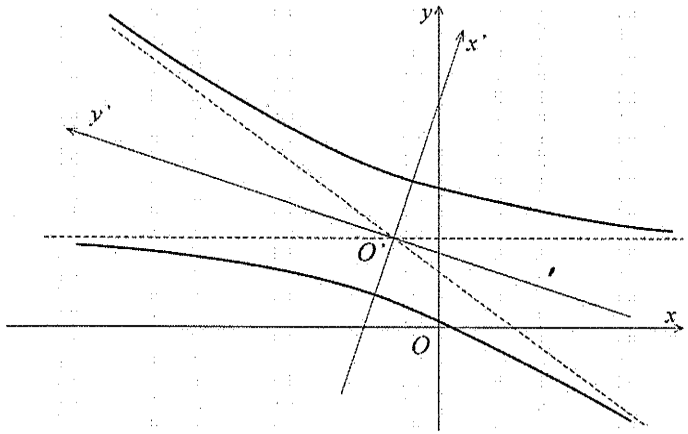


Рис. 39

б) Спочатку знайдемо формули переходу від системи координат Oxy до системи координат $O'x'y'$.

Позаяк $\operatorname{tg}\alpha = 3$, то $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$. Отож, формули переходу набувають вигляду

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}x' - \dfrac{3}{\sqrt{10}}y' - 1 \\ y = \dfrac{3}{\sqrt{10}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{10}}y' + 2. \end{cases} \tag{5.13}$$

Оскільки фокус F_1 в канонічній системі координат має координати $(-\sqrt{10}; 0)$, то в системі координат Oxy він має координати

$$x = -\frac{1}{\sqrt{10}}\sqrt{10} - \frac{3}{\sqrt{10}}0 - 1 = -2$$

$$y = -\frac{3}{\sqrt{10}}\sqrt{10} + \frac{1}{\sqrt{10}}0 + 2 = -1.$$

Аналогічно знаходимо координати $(0; 5)$ другого фокуса F_2 в системі координат Oxy.

Директриси в канонічній системі координат $O'x'y'$ задаються рівняннями
$x' = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$. З рівнянь (5.13) знаходимо

$$x' = \frac{1}{\sqrt{10}}x + \frac{3}{\sqrt{10}}y - \frac{5}{\sqrt{10}}.$$

Отже, директриси в початковій системі координат задаються рівняннями:

$$\frac{1}{\sqrt{10}}x + \frac{3}{\sqrt{10}}y - \frac{5}{\sqrt{10}} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}\text{ , або}$$

$$x + 3y - 4 = 0,$$

$$x + 3y - 6 = 0.$$

Приклад 5.13. Визначте тип і розташування лінії другого порядку

$$x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0.$$

Розв'язання. Обчислимо ортогональні інваріанти I_1, I_2, I_3

$$I_1 = 1 + 4 = 5,\ I_2 = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 4 \end{vmatrix} = -\frac{9}{4} < 0,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & 4 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Позаяк $I_2 < 0$ і $I_3 = 0$, то лінія є парою дійсних прямих, що перетинаються.

Для визначення типу лінії зручно користуватися методом ортогональних інваріантів, але для визначення розташування цієї лінії в початковій системі координат зручніше скористатися методом Лагранжа

$$x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 =$$

$$= \left(x - \frac{5}{2}y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}y^2 + \frac{5}{2}y - \frac{1}{4} + 4y^2 + 2y - 2 =$$

$$= \left(x - \frac{5}{2}y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}y^2 + \frac{9}{2}y - \frac{9}{4} =$$

$$= \left(x - \frac{5}{2}y + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}y - \frac{3}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(x - \frac{5}{2}y + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}y + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}\right) =$$

$$= (x - 4y + 2)(x - y - 1) = 0.$$

Отож, ця пара прямих задається рівняннями

$$x - 4y + 2 = 0$$
$$x - y - 1 = 0.$$

Приклад 5.14. Визначте тип і розташування лінії другого порядку

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0.$$

Знайдіть координати фокусів та рівняння директрис цієї лінії.
Розв'язання. Обчислимо ортогональні інваріанти I_1, I_2, I_3

$$I_1 = 1 + 4 = 5,\quad I_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} & -7 \end{vmatrix} = -\frac{25}{4}.$$

Позаяк $I_2 = 0$ і $I_3 \neq 0$, то ця лінія є параболою. В канонічній системі координат $O'x'y'$ вона задається рівнянням

$$y'^2 = 2\sqrt{-\frac{\left(-\frac{25}{4}\right)}{5^3}}x' \quad \text{або } y'^2 = 2\sqrt{\frac{1}{20}}x'.$$

Віссю $O'x'$ цієї параболи є її головний діаметр. Діаметр, який спряжений з напрямком $\vec{p}(\alpha;\beta)$, задається рівнянням

$$(\alpha - 2\beta)x + (-2\alpha + 4\beta)y + 2\alpha - \frac{3}{2}\beta = 0.$$

Оскільки головний діаметр перпендикулярний до спряжених хорд, то

$$\alpha \cdot (2\alpha - 4\beta) + \beta(\alpha - 2\beta) = 0.$$

Нехай $\beta = 1$, тоді $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$, $\alpha_2 = 2$. Отримали два напрямки $\vec{p}_1\left(-\frac{1}{2};1\right)$, $\vec{p}_2(2;1)$. Напрямок $\vec{p}_2$ є асимптотичним. Отож, головний діаметр має рівняння

$$\left(-\frac{1}{2} - 2\right)x + (1+4)y - 1 - \frac{3}{2} = 0 \quad \text{або} \quad x - 2y + 1 = 0.$$

Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0 \\ x - 2y + 1 = 9 \end{cases},$$

отримали координати $(3;2)$ вершини параболи O', яка є початком системи координат.

Одиничний вектор осі абсцис канонічної системи координат визначаємо з системи $\begin{cases} \alpha - 2\beta = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 1 \\ 2\alpha - \frac{3}{2}\beta < 0 \end{cases}$, тобто $\vec{i}\,' = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Одиничний вектор $\vec{j}\,' = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ буде напрямним вектором осі ординат (див. рис. 40).

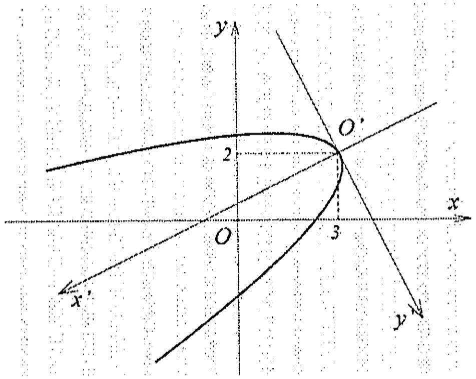


Рис. 40

У канонічній системі координат фокус F параболи має координати $\left(\frac{1}{4\sqrt{5}};0\right)$, а директриса задається рівнянням $x' = -\frac{1}{4\sqrt{5}}$. Запишемо формули переходу

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

і визначимо координати фокуса F у початковій системі координат

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отже. фокус у початковій системі координат має координати $F(2,9;1,95)$. Зі знайдених формул переходу визначимо змінну x' через змінні x, y

$$x' = \frac{2x + y - 8}{-\sqrt{5}}.$$

Отож, директриса параболи в початковій системі координат має рівняння

$$\frac{2x + y - 8}{-\sqrt{5}} = -\frac{1}{4\sqrt{5}},$$

або

$$8x + 4y - 33 = 0.$$

Приклад 5.15. Визначте тип і розташування лінії другого порядку

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 2 = 0.$$

Розв'язання. Обчислимо ортогональні інваріанти I_1, I_2, I_3

$$I_1 = 4 + 9 = 13$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 4 & -6 & -1 \\ -6 & 9 & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

За обчисленими інваріантами робимо висновок, що ця лінія є лінією третього типу, тобто парою паралельних прямих.

Квадратична частина рівняння, що задає цю лінію, є повним квадратом, тому це рівняння можна переписати так:

$$(2x-3y)^2-(2x-3y)-2=0.$$

Розклавши квадратний тричлен на множники, отримуємо

$$(2x-3y-2)(2x-3y+1)=0,$$

отже задана лінія є парою дійсних паралельних прямих

$$2x-3y-2=0,$$

$$2x-3y+1=0.$$

Вправи

5.5.1. За допомогою ортогональних інваріантів визначте канонічне рівняння і канонічну систему координат. Запишіть формули переходу, знайдіть координати фокусів і рівняння директрис ліній:

а) $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$;
б) $7x^2-24xy-38x+24y+175=0$;
в) $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$;
г) $4x^2+16xy+15y^2-8x-22y-5=0$;
ґ) $4x^2+4xy+y^2+16x+8y+15=0$.

5.5.2. За допомогою ортогональних інваріантів визначте канонічне рівняння і канонічну систему координат лінії:

а) $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$;
б) $6xy+8y^2-12x-26y+11=0$;
в) $4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0$;
г) $13x^2+2xy+5y^2-2x-10y+5=0$;
ґ) $16x^2+24xy+9y^2-8x-6y+1=0$.

5.5.3. За допомогою ортогональних інваріантів визначте канонічне рівняння і канонічну систему координат лінії:

а) $9x^2-4xy+6y^2+16x-8y-2=0$;
б) $8x^2+6xy-26x-12y+11=0$;
в) $x^2-2xy+y^2-x-2y+3=0$;
г) $4x^2-4xy+y^2-x-2=0$;
ґ) $4x^2-4xy+y^2-6x+3y-4=0$.

5.6. Дотичні до ліній другого порядку

Як відомо, *дотичною* до лінії в заданій точці M_0 називається граничне положення січної M_0M (якщо таке існує) при прямуванні точки M до точки M_0. Однак у загальній теорії ліній другого порядку прийняте й інше, формальніше означення дотичної. *Дотичною* до лінії другого порядку називається пряма, яка перетинає лінію в двох точках, що збігаються. Дотична до лінії, заданої рівнянням (5.1), в її точці $M_0(x_0,y_0)$ визначається рівнянням

$$(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13})x+(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23})y+a_{13}x_0+a_{23}y_0+a_{33}=0. \tag{5.14}$$

Приклад 5.16. Запишіть рівняння дотичної до лінії $2xy-4x++2y-2=0$, яка перпендикулярна до прямої $x+y+1=0$.

Розв'язання. Рівняння дотичної до заданої лінії в точці $M_0(x_0;y_0)$ набуває вигляду

$$(y_0-2)x+(x_0+1)y-2x_0+y_0-2=0.$$

Вектор $\vec{p}=(-(x_0+1);y_0-2)$ є напрямним вектором цієї дотичної.

Оскільки дотична має бути перпендикулярною до прямої $x++y+1=0$, то вектор $\vec{p}$ перпендикулярний до вектора $\vec{q}=(-1;1)$. Тому $\vec{p}\cdot\vec{q}=0$, або $x_0+1+y_0-2=0$.

Оскільки точка $M_0(x_0;y_0)$ належить лінії, то маємо ще одне рівняння

$$2x_0y_0-4x_0+2y_0-2=0.$$

Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} x_0+1+y_0-2=0 \\ 2x_0y_0-4x_0+2y_0-2=0, \end{cases}$$

отримуємо дві точки $M_1(0;1)$ і $M_2(-2;3)$, в кожній з яких дотична до лінії перпендикулярна до заданої прямої. Підставивши координати цих точок у рівняння дотичної, одержимо рівняння шуканих дотичних

$$x-y+1=0, \quad x-y+5=0.$$

Вправи

5.6.1. Запишіть рівняння дотичної до лінії $x^2-4xy+3y^2-2y-1=0$ у точці $M(0;1)$.

5.6.2. Запишіть рівняння дотичної до лінії $2x^2-2xy+y^2+x-1=0$ в точці $M(-1;0)$.

5.6.3. Знайдіть дотичну до лінії другого порядку $5x^2+3xy-y^2+$ $+2x+1=0$ у точках її перетину з осями координат.

5.6.4. Знайдіть дотичну до лінії другого порядку $4xy-3y^2+x-6y=$ $=0$ у точках, абсциси яких дорівнюють 1.

5.6.5. Знайдіть дотичну до лінії другого порядку $3x^2+7xy+5y^2+$ $+4x+5y+1=0$, яка проходить через початок координат.

5.6.6. Знайдіть дотичну до лінії другого порядку $2x^2-4xy+y^2-$ $-2x+6y-3=0$, яка проходить через точку $A(3;4)$.

5.6.7. Через точку $(-2;1)$ проведіть дотичні до ліній:

а) $3x^2+2xy+2y^2+3x-4y=0$;

б) $2x^2-xy-y^2-15x-3y+18=0$.

5.6.8. Запишіть рівняння дотичної до еліпса $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$, яка проходить через точку:

а) $\left(\dfrac{3}{2};-\sqrt{3}\right)$; б) $(3;2)$; в) $(0;1)$.

5.6.9. Запишіть рівняння дотичної до гіперболи $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$, яка проходить через точку:

а) $\left(-\dfrac{20}{3};4\right)$; б) $(4;\sqrt{3})$; в) $(8;1)$.

5.6.10. Запишіть рівняння дотичної до параболи $y^2=8x$, яка проходить через точку:

а) $(2;-4)$; б) $(1;4)$; в) $(4;1)$.

5.6.11. Знайдіть дотичну до еліпса $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{3}=1$, яка утворює кут $45°$ з віссю абсцис.

5.6.12. Знайдіть дотичну до гіперболи $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$, яка утворює кут $45°$ з віссю абсцис.

5.6.13. Знайдіть дотичну лінії другого порядку $x^2-2xy+3y^2-4=0$, якщо ця дотична паралельна до прямої $x-y=0$.

5.6.14. Знайдіть дотичну лінії другого порядку $3x^2-4xy-y^2+9=0$, якщо ця дотична паралельна до прямої $2x+y=0$.

5.6.15. Визначте, за яких значень кутового коефіцієнта k пряма $y=kx$:

а) перетинає коло $x^2+y^2-10x+6=0$;

б) дотикається до цього кола;

в) не має спільних точок з колом.

5.6.16. Визначте, за яких значень кутового коефіцієнта k пряма $y=-kx$:

а) перетинає лінію $x^2+10xy+y^2+8x-1=0$;

б) дотикається до цієї лінії;

в) не має спільних точок з лінією.

5.6.17. За якого значення параметра λ лінія $x^2+2\lambda xy-y^2+5-9=0$ має єдину спільну точку з прямою $2x-y+7=0$?

5.6.18. Лінія другого порядку дотикається до прямої $4x+y+5=0$ і прямі $x-1=0$ і $2x-y+1=0$ є її асимптотами. Запишіть рівняння цієї лінії.

5.6.19. Лінія другого порядку дотикається до прямої $x+2y=0$ і прямі $x+y-3=0$ і $3x+4y+1=0$ є її асимптотами. Запишіть рівняння цієї лінії.

5.6.20. Гіпербола дотикається до осі абсцис і прямі $3x+y-5=0$ і $x-y+1=0$ є її асимптотами. Запишіть рівняння гіперболи.

5.6.21. Гіпербола дотикається до осі ординат і прямі $x-5y+1=0$ і $2x-y=0$ є її асимптотами. Запишіть рівняння гіперболи.

Відповіді до розділу 5

5.1.1. а) $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$; б) $\frac{(y+1)^2}{9}-\frac{(x-3)^2}{4}=1$; в) $(y+1)^2=-6(x-3)$; г) $(x-2)^2=7(y+1)$; ґ) $\begin{cases}2x-3y-8=0\\2x+3y+4=0\end{cases}$; д) $\begin{cases}3x-11=0\\3x-1=0\end{cases}$; е) $\frac{(y-2)^2}{4}-\frac{(x+1)^2}{1}=1$. **5.1.2.** а) $\frac{(x+1)^2}{5}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$; б) $\frac{(x+3)^2}{1}-\frac{(y+2)^2}{25}=1$; в) $(y-2)^2=3(x-7)$; г) $(x+4)^2=-5y$; ґ) $\begin{cases}x-4y=0\\x+4y+8=0\end{cases}$; д) $4(y+1)^2=-49.$; е) $\frac{(y-1)^2}{3}-\frac{(x+2)^2}{2}=1$. **5.1.3.** а) $\frac{X^2}{169}+\frac{Y^2}{144}=1$, $\begin{cases}x=X+5\\y=Y-4\end{cases}$, $F_1(0;-4)$, $F_2(10;-4)$, $x=\frac{194}{5}$, $x=-\frac{144}{5}$; б) $\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{5}=1$,

$\begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y + 3 \end{cases}$, $F_1(-3;3)$, $F_2(1;3)$, $y = \frac{7}{2}$, $y = -\frac{11}{2}$; в) $\frac{X^2}{64} - \frac{Y^2}{36} = 1$, $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - 4 \end{cases}$, $F_1(-9;-4)$, $F_2(11;-4)$, $x = \frac{37}{5}$, $x = -\frac{27}{5}$; г) $\frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{2} = 1$, $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \end{cases}$, $F_1(\sqrt{2};\sqrt{2})$, $F_2(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$, $x + y - \sqrt{2} = 0$, $x + y + \sqrt{2} = 0$; ґ) $\frac{X^2}{8} - \frac{Y^2}{8} = 1$, $\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y \end{cases}$, $F_1(-2\sqrt{2};2\sqrt{2})$, $F_2(2\sqrt{2};-2\sqrt{2})$, $-x + y - 2\sqrt{2} = 0$, $-x + y + 2\sqrt{2} = 0$; д) $\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{4} = 1$, $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y + 1 \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y - 2 \end{cases}$, $F_1(3;0)$, $F_2(-1;-4)$, $x + y - 1 = 0$, $x + y + 3 = 0$; е) $\frac{X^2}{6} - \frac{Y^2}{6} = 1$, $\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y + 3 \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y - 2 \end{cases}$, $F_1(-\sqrt{6} - 3;\sqrt{6} + 2)$, $F_2(\sqrt{6} - 3;-\sqrt{6} + 2)$, $x - y + \sqrt{6} + 5 = 0$, $x - y - \sqrt{6} - 5 = 0$; є) $\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{5} = 1$, $\begin{cases} x = X - 3 \\ y = Y + 1 \end{cases}$, $F_1(-6;1)$, $F_2(0;1)$, $x = -\frac{5}{3}$, $x = -\frac{13}{3}$; ж) $Y^2 = 10X$, $\begin{cases} x = -X \\ y = Y \end{cases}$, $F(-\frac{5}{2};0)$, $x = \frac{5}{2}$; з) $Y^2 = 10X$, $\begin{cases} x = Y \\ y = X \end{cases}$, $F(0;\frac{5}{2})$, $y = -\frac{5}{2}$; и) $Y^2 = 10X$, $\begin{cases} x = Y \\ y = -X \end{cases}$, $F(0;-\frac{5}{2})$, $y = \frac{5}{2}$; і) $Y^2 = 4X$, $\begin{cases} x = Y + 3 \\ y = X + 5 \end{cases}$, $F(3;6)$, $y = 4$; ї) $Y^2 = -X$, $\begin{cases} x = Y - 2 \\ y = X + 7 \end{cases}$, $F\left(-2;\frac{27}{4}\right)$, $y = \frac{29}{4}$; й) $-\frac{X^2}{\frac{11}{16}} + \frac{Y^2}{\frac{11}{36}} = 1$, $\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{13}}X - \frac{3}{\sqrt{13}}Y + \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{\sqrt{13}}X + \frac{2}{\sqrt{13}}Y + \frac{1}{4} \end{cases}$, $F_1\left(\frac{\sqrt{11}+2}{4};\frac{-2\sqrt{11}+3}{12}\right)$, $F_1\left(\frac{-\sqrt{11}+2}{4};\frac{2\sqrt{11}+3}{12}\right)$, $-3x + 2y + 1 = \pm\frac{\sqrt{11}}{3}$; к) $Y^2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}X$, $\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}}X - \frac{1}{\sqrt{5}}Y + 3 \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}X + \frac{2}{\sqrt{5}}Y + 2 \end{cases}$, $F\left(2,9;1,95\right)$, $8x + 4y - 33 = 0$.

5.1.4. а) $\frac{X^2}{100} + \frac{Y^2}{64} = 1$, $\begin{cases} x = X - 5 \\ y = Y + 4 \end{cases}$, $F_1(-11;4)$, $F_2(1;4)$, $x = \frac{35}{3}$, $x = -\frac{65}{3}$; б) $\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{9} = 1$, $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - 2 \end{cases}$, $F_1(1;-2 - \sqrt{5})$, $F_2(1;-2 + \sqrt{5})$, $y = -2 - \frac{9}{\sqrt{5}}$, $y = -2 + \frac{9}{\sqrt{5}}$; в) $\frac{X^2}{25} - \frac{Y^2}{144} = 1$, $\begin{cases} x = X - 2 \\ y = Y + 3 \end{cases}$, $F_1(-15;3)$, $F_2(11;3)$, $x = \frac{1}{13}$, $x = -\frac{51}{13}$; г) $\frac{X^2}{6} - \frac{Y^2}{6} = 1$, $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \end{cases}$,

$F_1(\sqrt{6};\sqrt{6})$, $F_2(-\sqrt{6};-\sqrt{6})$, $x + y - \sqrt{6} = 0$, $x + y + \sqrt{6} = 0$; ґ) $\frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{16} = 1$, $\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y \end{cases}$, $F_1(-4;4)$, $F_2(4;-4)$, $x - y + 4 = 0$, $x - y - 4 = 0$; д) $\frac{X^2}{8} - \frac{Y^2}{8} = 1$, $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y + 3 \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y - 1 \end{cases}$, $F_1(2\sqrt{2} - 3;2\sqrt{2} + 1)$, $F_2(-2\sqrt{2} - 3;-2\sqrt{2} + 1)$, $x + y + 2 - 2\sqrt{2} = 0$, $x + y + 2 + 2\sqrt{2} = 0$; е) $\frac{X^2}{20} - \frac{Y^2}{20} = 1$, $\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y - 5 \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y + 1 \end{cases}$, $F_1(-2\sqrt{5} + 5;2\sqrt{5} - 1)$, $F_2(2\sqrt{5} + 5;-2\sqrt{5} - 1)$, $x - y - 6 + 2\sqrt{5} = 0$, $x - y - 6 - 2\sqrt{5} = 0$; є) $\frac{X^2}{3} - \frac{Y^2}{1} = 1$, $\begin{cases} x = X - 4 \\ y = Y + 1 \end{cases}$, $F_1(-2;1)$, $F_2(-6;1)$, $x = -\frac{11}{2}$, $x = -\frac{5}{2}$; ж) $Y^2 = 8X$, $\begin{cases} x = -X \\ y = Y \end{cases}$, $F(-2;0)$, $x = 2$; з) $Y^2 = 8X$, $\begin{cases} x = Y \\ y = X \end{cases}$, $F(0;2)$, $y = -2$; и) $Y^2 = 8X$, $\begin{cases} x = Y \\ y = -X \end{cases}$, $F(0;-2)$, $y = 2$; і) $Y^2 = 2X$, $\begin{cases} x = X - 3 \\ y = Y + 1 \end{cases}$, $F(-\frac{5}{2};1)$, $x = -\frac{7}{2}$; ї) $Y^2 = -X$, $\begin{cases} x = Y - 2 \\ y = X + 4 \end{cases}$, $F\left(-2;\frac{15}{4}\right)$, $y = \frac{17}{4}$; й) $\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{1} = 1$, $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}X - \frac{2}{\sqrt{5}}Y - \frac{4}{5} \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}X + \frac{1}{\sqrt{5}}Y + \frac{2}{5} \end{cases}$, $F_1\left(\frac{2\sqrt{5}-4}{5};\frac{-\sqrt{5}+2}{5}\right)$, $F_1\left(\frac{-2\sqrt{5}-4}{5};\frac{\sqrt{5}+2}{5}\right)$, $x + 2y = \pm 2\sqrt{5}$; к) $Y^2 = 4X$, $\begin{cases} x = \frac{4}{5}X - \frac{3}{5}Y - \frac{4}{5} \\ y = \frac{3}{5}X + \frac{4}{5}Y - \frac{3}{5} \end{cases}$, $F\left(0;0\right)$, $4x + 3y + 10 = 0$.

5.1.5. а) Еліпс $\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{1} = 1$, центр $C\left(0;1\right)$, $\vec{e}_1^{\,\prime} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\vec{e}_2^{\,\prime} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; б) гіпербола $X^2 - Y^2 = 1$, центр $C\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$, $\vec{e}_1^{\,\prime} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\vec{e}_2^{\,\prime} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; в) еліпс $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1$, центр $C\left(2;3\right)$, $\vec{e}_1^{\,\prime} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\vec{e}_2^{\,\prime} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$; г) гіпербола $\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{9} = 1$, центр $C\left(1;1\right)$, $\vec{e}_1^{\,\prime} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}};\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$, $\vec{e}_2^{\,\prime} = \left(-\frac{2}{\sqrt{13}};\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$; ґ) парабола $Y^2 = 10X$, вершина $C\left(-1;2\right)$, $\vec{e}_1^{\,\prime} = \left(\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right)$, $\vec{e}_2^{\,\prime} = \left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$; д) парабола $Y^2 = \frac{16}{13\sqrt{13}}X$, вершина $C\left(\frac{18}{169};-\frac{51}{169}\right)$, $\vec{e}_1^{\,\prime} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}};\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$, $\vec{e}_2^{\,\prime} = \left(-\frac{3}{\sqrt{13}};\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$; е) паралельні прямі $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases}$; є) дійсні прямі, що перетинаються $\begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ x - 4y + 2 = 0 \end{cases}$; ж) дійсні прямі, що перетинаються $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$; з) паралельні прямі $\begin{cases} 2x - 3y - 2 = 0 \\ 2x - 3y - 8 = 0 \end{cases}$.

5.1.6. $F_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $F_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. **5.1.7.** $F_1(-\sqrt{2};0)$, $F_2(\sqrt{2};0)$, $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. **5.1.8.** $F(1;0)$, $x=-1$. **5.1.9.** $F(0;3)$, $y=-\frac{9}{4}$.

5.2.1. а) $\vec{p}=(1;-1),\vec{q}=(1;3)$; б) $\vec{p}=(1;0),\vec{q}=(1;5)$; в) $\vec{p}=(1;0),\vec{q}=(0;1)$; г) $\vec{p}=(1;0),\vec{q}=(0;1)$; д) $\vec{p}=(1;-1)$; е) не існує дійсних асимптотичних напрямків; є) $\vec{p}=(-3;2),\vec{q}=(1;4)$; ж) $\vec{p}=(4;1)$. **5.2.2.** а) $(-1;-1)$; б) $(0;1)$; в) $(7;5)$; г) лінія центрів $x+3y+2=0$; д) $(-4;-1)$; е) лінія не центральна. **5.2.3.** а) $5x+12y-1=0$, $x-1=0$; б) $2x-1=0$, $y+2=0$; в) $3x+4y+14=0$, $x+y-3=0$; г) $x=3$, $x+3y-3=0$. **5.2.4.** $5x^2-6xy+y^2+10x-2y+5=0$. **5.2.5.** $4x^2+3xy-y^2+4x-y+1=0$. **5.2.6.** $34x^2+29xy+6y^2-148x-64y-182=0$. **5.2.7.** $2x^2+3xy-2y^2+3x+11y-9=0$. **5.2.8.** $2x^2+3xy-2y^2-13x+9y-\frac{39}{2}=0$. **5.2.9.** $5x^2-20xy+20x-40y-16=0$. **5.2.10.** а) $x'y'=-\frac{11}{2}$, $\begin{cases} x'=x+2 \\ y'=y-3 \end{cases}$; б) $x'y'=-4$, $\begin{cases} x'=x-5 \\ y'=y+2 \end{cases}$.

5.3.1. а) $6x+29y-17=0$; б) $2x-2y+1=0$; в) $x+y-\frac{9}{14}=0$. **5.3.2.** а) $21x+11y-12=0$; б) $6x+12y+1=0$; в) $12x-6y-13=0$. **5.3.3.** а) $x-3y=0$; б) $x-3y-6=0$; в) $5x-15y-8=0$, $5x-15y-19=0$; г) $10x-30y-27=0$. **5.3.4.** а) $x-y=0$; б) $x-y+3=0$; в) $x-y+3=0$, $x-y-2=0$; г) $2x-2y+1=0$. **5.3.5.** $x-2y=0$, $3x-2y=0$. **5.3.6.** $6x-13y+7=0$, $3x-y-2=0$. **5.3.7.** $10x-4y+5=0$, $2x-4y+25=0$. **5.3.8.** $y=-\frac{x}{2}$, $2\sqrt{10}$. **5.3.9.** $y=-\frac{x}{4}$, $\arccos\frac{5}{\sqrt{34}}$. **5.3.10.** $y=\frac{x}{4}$. **5.3.11.** $y=\frac{x}{2}$. **5.3.12.** $y=\pm\frac{3}{5}x$, $4\sqrt{17}$. **5.3.13.** $y=\frac{x}{2}$, $y=\frac{3x}{2}$. **5.3.14.** $3x+y-7=0$. **5.3.15.** $y=3x$, $y=2x$. **5.3.16.** $x^2-xy-y^2-x-y=0$. **5.3.17.** $19x^2-56xy+43y^2-6=0$. **5.3.18.** $4x^2+8xy+13y^2-24x-42y+9=0$. **5.3.19.** $x^2-2xy+5y^2-4x-4y+4=0$. **5.3.20.** $x^2-2xy+2y^2-2x+1=0$. **5.3.21.** $x^2+2xy+2y^2-14x-20y+48=0$.

5.4.1. а) $8x-4y+1=0$, $18x+36y+1=0$; б) $6x-6y+3=0$, $6x+6y-1=0$; в) $5x-10y+4=0$, $10x+5y-\frac{192}{11}=0$; г) $4x+4y+7=0$, $4x-4y+7=0$; ґ) $4x+3y+\frac{4}{7}=0$, $3x-4y-\frac{6}{11}=0$; д) $2x+2y+1=0$, $x-y+2=0$. **5.4.2.** а) $\left(\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)$, $x+2y-1=0$; б) $\left(\frac{18}{169};-\frac{51}{169}\right)$, $3x-2y-\frac{12}{13}=0$. **5.4.3.** а) $5X^2+10Y^2=1$; б) $13Y^2-52X^2=1$; в) $2X^2-2Y^2=11$; г) $\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4}=1$; ґ) $\frac{X^2}{4}-\frac{Y^2}{9}=1$.

5.5.1. а) Еліпс $\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4}=1$, центр $C(2;3)$, $\vec{e}_1'=\left(\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\vec{e}_2'=\left(\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$; б) гіпербола $\frac{X^2}{16}-\frac{Y^2}{9}=1$, центр $C(1;-1)$, $\vec{e}_1'=\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$, $\vec{e}_2'=\left(-\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$; в) парабола $Y^2=4\sqrt{2}X$, вершина $C(2;1)$, $\vec{e}_1'=\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\vec{e}_2'=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; г) дійсні прямі, що перетинаються $\begin{cases} 2x+5y+1=0 \\ 2x+3y-5=0 \end{cases}$;

ґ) паралельні прямі $\begin{cases} 2x+y+3=0 \\ 2x+y+5=0 \end{cases}$. **5.5.2.** а) Еліпс $\frac{X^2}{1}+\frac{Y^2}{9}=1$, центр $C(1;1)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\vec{e}_2'=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; б) гіпербола $\frac{X^2}{1}-\frac{Y^2}{9}=1$, центр $C(-1;2)$, $\vec{e}_1'=\left(\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$, $\vec{e}_2'=\left(-\frac{3}{\sqrt{10}};\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$; в) парабола $Y^2=\frac{6}{\sqrt{5}}X$, вершина $C\left(\frac{4}{5};\frac{13}{5}\right)$, $\vec{e}_1'=\left(\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $\vec{e}_2'=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$; г) уявні прямі, що перетинаються в дійсній точці $(13x+y-1)^2+64(y-1)^2=0$; ґ) пара прямих, що збігаються $(4x+3y-1)^2=0$. **5.5.3.** а) Еліпс $\frac{X^2}{2}+\frac{Y^2}{1}=1$, центр $C\left(-\frac{4}{5};\frac{2}{5}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $\vec{e}_2'=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$; б) гіпербола $\frac{X^2}{1}-\frac{Y^2}{9}=1$, центр $C(2;-1)$, $\vec{e}_1'=\left(\frac{3}{\sqrt{10}};\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$, $\vec{e}_2'=\left(-\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$; в) парабола $Y^2=\frac{3}{2\sqrt{2}}X$, вершина $C\left(\frac{41}{48};\frac{53}{48}\right)$, $\vec{e}_1'=\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\vec{e}_2'=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; г) парабола $Y^2=\frac{1}{5\sqrt{5}}X$, вершина $C\left(-\frac{253}{25};-\frac{511}{25}\right)$, $\vec{e}_1'=\left(\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $\vec{e}_2'=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$; ґ) паралельні прямі $2x-y+1=0$, $2x-y-4=0$.

5.6.1. $x-y+1=0$. **5.6.2.** $3x-2y+3=0$. **5.6.3.** $5x-2y+2=0$, $x-2y+2=0$. **5.6.4.** $3x-4y-7=0$, $7x-12y-3=0$. **5.6.5.** $2x+5y=0$, $2x+y=0$. **5.6.6.** $7x-2y-13=0$, $x-3=0$. **5.6.7.** а) $7x+4y+10=0$; б) $4x+5y+3=0$. **5.6.8.** а) $2x-3\sqrt{3}y-12=0$; б) $x=3$, $y=2$; в) дотичних провести не можливо. **5.6.9.** а) $15x+16y+36=0$; б) $x=4$, $3x-2\sqrt{3}y-6=0$; в) дотичних провести не можливо. **5.6.10.** а) $x+y+2=0$; б) $x-(1\pm\frac{1}{\sqrt{2}})y+3\pm2\sqrt{2}=0$; в) дотичних провести не можливо. **5.6.11.** $x\pm y\pm\sqrt{15}=0$. **5.6.12.** $x\pm y\pm\sqrt{5}=0$. **5.6.13.** $x-y\pm2=0$. **5.6.14.** $2x+y\pm3=0$. **5.6.15.** а) $k\in\left(-\sqrt{\frac{19}{6}};\sqrt{\frac{19}{6}}\right)$; б) $k=\pm\sqrt{\frac{19}{6}}$; в) $k\in\left(-\infty;-\sqrt{\frac{19}{6}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{19}{6}};\infty\right)$. **5.6.16.** а) $k\in\left(-\infty;5-2\sqrt{2}\right)\cup\left(5+2\sqrt{2};\infty\right)$; б) $k=5\pm2\sqrt{2}$; в) $k\in\left(5-2\sqrt{2};5+2\sqrt{2}\right)$. **5.6.17.** $\frac{3}{4}$. **5.6.18.** $2x^2-xy-x+y+5=0$. **5.6.19.** $3x^2+7xy+4y^2+x-12y+\frac{547}{2}=0$. **5.6.20.** $3x^2-2xy-y^2+3x+5y+\frac{3}{4}=0$. **5.6.21.** $2x^2-11xy+5y^2+2x-y+\frac{1}{20}=0$.

Розділ 6
Загальна теорія поверхонь другого порядку

Поповнення простору уявними точками відбувається аналогічно до поповнення площини уявними точками. Нехай у просторі задано деяку афінну систему координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$. Тоді ми можемо кожній точці M простору поставити у відповідність трійку дійсних чисел $(x;y;z)$, а саме координати цієї точки в системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$. Тоді довільну трійку $(x;y;z)$ комплексних чисел оголошуємо *комплексною точкою*, а числа $(x;y;z)$ називаємо *координатами точки* в системі координат $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$. Множина всіх комплексних точок утворює комплексний простір. Всі приєднані точки, в яких хоча б одна координата не є дійсним числом, називають *уявними точками* комплексного простору.

У цьому розділі, якщо не зазначено іншого, вважаємо, що задано прямокутну систему координат.

6.1. Сфера

Сферою називається геометричне місце точок простору, рівновіддалених від фіксованої точки. Ця фіксована точка називається *центром* сфери, а відстань від довільної точки сфери до центра — *радіусом* сфери.

Приклад 6.1. Нехай у прямокутній системі координат $Oxyz$ задано центр сфери $C(x_0;y_0;z_0)$ і радіус R. Запишіть рівняння сфери.

Розв'язання. Обчислимо відстань від точки $C(x_0;y_0;z_0)$ до довіль-

ної точки $M(x;y;z)$ простору

$$d(C_0, M) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

За означенням рівняння сфери з центром у точці $(x_0;y_0;z_0)$ і радіусом R набуває вигляду

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2. \tag{6.1}$$

Вправи

6.1.1. Запишіть рівняння сфери, яка:

а) має центр у точці $(2;-1;3)$ і радіус $R=6$;

б) має центр у точці $(0;0;0)$ і проходить через точку $(6;-2;3)$;

в) має центр у точці $(1;4;-7)$ і дотикається до площини $6x+$ $+6y-7z+42=0$;

г) має центр у точці $(6;-8;3)$ і дотикається до осі аплікат.

6.1.2. Складіть рівняння описаної навколо трикутної піраміди $ABCD$ сфери, якщо відомо координати вершин піраміди $A(2;0;0)$, $B(0;5;0)$, $C(0;0;3)$, $D(0;0;0)$.

6.1.3. Визначте центр і радіус сфери:

а) $x^2+y^2+z^2-6x+8y+2z+10=0$;

б) $x^2+y^2+z^2+2x-4y-4=0$;

в) $x^2+y^2+z^2-6x+10=0$;

г) $x^2+y^2+z^2-4x+12y-2z+41=0$;

ґ) $36x^2+36y^2+36z^2-36x+24y-72z-95=0$.

6.1.4. Запишіть рівняння сфери, яка проходить через три точки $(3;1;-3)$, $(-2;4;1)$, $(-5;0;0)$ і її центр лежить на площині $2x+y-$ $-z+3=0$.

6.1.5. Запишіть рівняння сфери, яка проходить через чотири точки $(1;-2-1)$, $(-5;10;-1)$, $(4;1;11)$, $(-8;-2;2)$.

6.1.6. Знайдіть рівняння сфери радіуса R, яка дотикається до:

а) трьох координатних площин;

б) трьох координатних осей.

6.1.7. З'ясуйте таке: як розташована точка $A(2;-1;3)$ стосовно кожної зі сфер:

а) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$;

б) $(x+14)^2+(y-11)^2+(z+12)^2=625$;

в) $(x-6)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=25$.

6.1.8. Обчисліть найкоротшу відстань від точки A до заданої сфери:

а) $A(-2;6;-3)$, $x^2+y^2+z^2=4$;

б) $A(9;-4;-3)$, $x^2+y^2+z^2+14x-16y-24z+241=0$;

в) $A(1;-1;3)$, $x^2+y^2+z^2-6x+4y-10z-62=0$.

6.1.9. Визначте, як розташована пряма стосовно сфери:

а) $\begin{cases} x=2-2t \\ y=-\frac{7}{2}+3t \\ z=-2+t \end{cases}$, $\quad x^2+y^2+z^2+x-4y-3z+\frac{1}{2}=0$;

б) $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+25}{-2}$, $\quad x^2+y^2+z^2-4x-6y+2z-67=0$;

в) $\begin{cases} 2x-y+2z-12=0 \\ 2x-4y-z+6=0 \end{cases}$, $\quad x^2+y^2+z^2-2x+2y+4z-43=0$.

6.1.10. Запишіть рівняння площин, які проходять через пряму $\dfrac{x-13}{-1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{4}$ і дотикаються до сфери $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-67=0$.

6.1.11. Знайдіть рівняння сфери, яка проходить через початок координат і через коло $\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2x-4y+4z-40=0 \\ 2x+2y-z+4=0 \end{cases}$.

6.1.12. * Знайдіть рівняння сфери, яка проходить через коло $\begin{cases} x^2+y^2=11 \\ z=0 \end{cases}$ і дотикається до площини $x+y+z-5=0$.

6.2. Поверхні обертання

Нехай у деякій площині лежить пряма l і лінія γ. Поверхня, яка утворюється внаслідок обертання лінії γ навколо прямої l, називається *поверхнею обертання.* Пряма l називається *віссю обертання,* лінія γ — *твірною* або *меридіаном* поверхні обертання. Кожна точка лінії γ обертається по колу, площина якого перпендикулярна до осі l, а центр розташований на осі l. Це коло називається *паралеллю* поверхні обертання.

Задача 6.1. Нехай у деякій прямокутній системі координат вісь Oz збігається з віссю обертання l, а лінія γ, яка обертається навколо l, розміщена в площині Oyz. Нехай лінія γ в системі координат Oyz задається рівнянням $F(y,z)=0$. Запишіть рівняння поверхні обертання лінії γ навколо прямої l.

Розв'язання. Нехай $M(x;y;z)$ — довільна точка поверхні обертання. Через цю точку проведемо площину, перпендикулярну до осі Oz. Вона перетне поверхню по колу, яке є паралеллю деякої поверхні обертання. Припустимо, що це коло перетинається з лінією γ у точці $M_0(y_0;z_0)$. Оскільки точка $M_0\in\gamma$, то $F(y_0,z_0)=0$. Центр цього кола позначимо через O'. Тоді $O'M$ радіус паралелі, тому $O'M=O'M_0$. Якщо точку M спроектувати на площину Oxy, то її проекцією буде точка $M'(x;y)$ і $O'M=OM'=\sqrt{x^2+y^2}$, а $O'M=|y_0|$. Звідси випливає, що $|y_0|=\sqrt{x^2+y^2}$, або

$$y_0=\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z_0=z.$$

Підставивши одержані значення в рівняння лінії γ, отримаємо

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0. \tag{6.2}$$

Отже, координати довільної точки M поверхні обертання задовольняють рівняння (6.2).

Припустимо тепер, що координати деякої точки $N(x_1;y_1;z_1)$ задовольняють рівняння (6.2), тобто $F(\pm\sqrt{x_1^2+y_1^2},z_1)=0$. Доведемо, що ця точка належить заданій поверхні обертання. Проведемо через точку N площину, перпендикулярну до осі Oz. Припустимо, що ця площина перетинає вісь Oz у точці O'. Побудуємо в цій площині коло з центром O' і радіусом $O'N$. Нехай це коло перетинає площину Oyz в точці $M_0(x_0;y_0)$. Тоді $O'N=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=O'M_0=|y_0|$. Звідси випливає, що

$$\begin{cases} y_0=\sqrt{x_1^2+y_1^2}, & \text{при } y_0\geqslant 0 \\ y_0=-\sqrt{x_1^2+y_1^2}, & \text{при } y_0<0. \end{cases}$$

Крім того, оскільки точки N і M_0 лежать у площині, паралельній до площини Oxy, то $z_1=z_0$. Тоді з рівності $F(\pm\sqrt{x_1^2+y_1^2},z_1)=0$ випливає рівність $F(y_0,z_0)=0$. Це означає, що точка M_0 належить меридіану, а отже, точка N лежить на заданій поверхні обертання. Отож, рівняння (6.2) є рівнянням поверхні обертання.

Задача 6.2. Задано еліпс $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, який розміщений у площині Oyz. Запишіть рівняння поверхні обертання, утвореної при обертанні цього еліпса навколо осі Oz.

Розв'язання. За формулою (6.2) рівняння цієї поверхні набуває вигляду

$$\frac{\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{або} \quad \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Ця поверхня називається *еліпсоїдом обертання.*

Вправи

6.2.1. Задано еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, який розміщений у площині Oxy. Запишіть рівняння поверхні обертання, утвореної при обертанні цього еліпса навколо осі Oy.

6.2.2. Задано еліпс $\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$, який розміщений у площині Oyz. Запишіть рівняння поверхні обертання, утвореної при обертанні цього еліпса навколо осі Oz.

6.2.3. Задано еліпс $\frac{x^2}{25}+\frac{(z-2)^2}{4}=1$, який розміщений у площині $y=3$. Запишіть рівняння поверхні обертання, утвореної при обертанні цього еліпса навколо осі Oz.

6.2.4. Задано пряму $\frac{x}{0}=\frac{y-3}{0}=\frac{z}{1}$. Запишіть рівняння поверхні обертання, утвореної при обертанні цієї прямої навколо осі Oz.

6.2.5. Задано пряму $\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{0}$. Запишіть рівняння поверхні обертання, утвореної при обертанні цієї прямої навколо осі Oy.

6.2.6. Задано пряму $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$. Запишіть рівняння поверхні обертання, утвореної при обертанні цієї прямої навколо осі Oz.

6.2.7. Задано гіперболу $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, яка розміщена в площині Oxy. Запишіть рівняння поверхні обертання, утвореної при обертанні цієї гіперболи навколо осі Oy.

6.2.8. Задано гіперболу $\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$, яка розміщена у площині Oyz. Запишіть рівняння поверхні обертання, утвореної при обертанні цієї гіперболи навколо осі Oz.

6.2.9. Задано рівняння гіперболи $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ в площині Oyz. Запишіть рівняння поверхні обертання, утвореної при обертанні цієї гіперболи навколо осі Oz.

6.2.10. Задано рівняння гіперболи $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ в площині Oyz. Запишіть рівняння поверхні обертання, утвореної при обертанні цієї гіперболи навколо осі Oy.

6.2.11. Задано рівняння гіперболи $\frac{x^2}{169}-\frac{y^2}{144}=1$ в площині Oxy. Запишіть рівняння поверхні обертання, утвореної при обертанні цієї гіперболи навколо осі Ox.

6.2.12. Задано параболу $y^2=4x$, яка розміщена у площині Oxy. Запишіть рівняння поверхні обертання, утвореної при обертанні цієї параболи навколо осі Ox.

6.2.13. Задано рівняння параболи $y^2=2px$ в площині Oxy. Запишіть рівняння поверхні обертання, утвореної при обертанні цієї параболи навколо осі Ox.

6.2.14. Задано рівняння прямої $y=z$ в площині Oyz. Запишіть рівняння поверхні обертання, утвореної при обертанні цієї прямої навколо осі Oz.

6.2.15. Задано рівняння прямої $y=b$ в площині Oyz. Запишіть рівняння поверхні обертання, утвореної при обертанні цієї прямої навколо осі Oz.

6.2.16. Задано рівняння прямої $\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$. Запишіть рівняння поверхні обертання, утвореної при обертанні цієї прямої навколо

а) осі Oz; б) осі Oy; в) осі Ox.

6.3. Конічні та циліндричні поверхні

Поверхня, утворена внаслідок руху прямої l, яка перетинає задану лінію γ і залишається паралельною до заданої прямої, називається *циліндричною поверхнею.* Прямі, які повністю лежать на цій поверхні і паралельні до заданої прямої, називаються *твірними* циліндричної поверхні, а лінія γ, яку перетинають ці твірні, називається *напрямною* цієї поверхні. Поверхня, утворена внаслідок руху прямої l, яка проходить через задану точку M_0 і перетинає задану лінію γ, називається *конічною поверхнею* або *конусом.* Задана точка називається *вершиною* конічної поверхні, крива γ — *напрямною* лінією. Прямі, які повністю лежать на поверхні конуса, проходять через його вершину і перетинають напрямну лінію, називаються *твірними* конуса.

Приклад 6.2. Складіть рівняння циліндричної поверхні, напрямна якої лежить у площині Oxy і має рівняння $x^2 + 2xy + 3y^2 - x = 0$, а твірні паралельні до вектора $\vec{p} = (1; 0; 1)$.

Розв'язання. Нехай $M(x; y; z)$ — довільна точка циліндричної поверхні. Проведемо через неї твірну MM', де M' — точка перетину цієї твірної з площиною Oxy, а отже, і з напрямною. Нехай M' має координати $(x'; y'; 0)$. Оскільки M' належить напрямній, то

$$x'^2 + 2x'y' + 3y'^2 - x' = 0. \qquad (6.3)$$

Запишемо параметричне рівняння твірної MM' з початковою точкою M' і напрямним вектором $\vec{p} = (1; 0; 1)$

$$\begin{cases} x = x' + t \\ y = y' \\ z = t. \end{cases} \qquad (6.4)$$

Змінні $(x; y; z)$ в цьому рівнянні є координатами точок твірної, а отже, циліндричної поверхні.

Об'єднавши системи (6.3) і (6.4),

$$\begin{cases} x = x' + t \\ y = y' \\ z = t \\ x'^2 + 2x'y' + 3y'^2 - x' = 0 \end{cases}$$

і вилучивши змінні x', y', z', t з рівнянь, отримуємо співвідношення між координатами точок циліндра, а саме

$$\begin{cases} x = x' + t \\ y = y' \\ z = t \\ (x - z)^2 + 2(x - z)y + 3y^2 - (x - z) = 0. \end{cases}$$

Отже, шукане рівняння заданої циліндричної поверхні набуває вигляду

$$(x - z)^2 + 2(x - z)y + 3y^2 - x + z = 0.$$

Приклад 6.3. Запишіть рівняння поверхні колового конуса, вершина якого розташована в точці $M_0(1; 2; 3)$, напрямний вектор осі $\vec{p} = (2; 2; -1)$, а твірні з віссю утворюють кут $\frac{\pi}{6}$.

Розв'язання. Нехай $M(x; y; z)$ — довільна точка. Точка M належить конусу тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ утворює кут $\frac{\pi}{6}$ або $\frac{5\pi}{6}$ з вектором $\vec{p} = (2; 2; -1)$, тобто $\cos\left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{p}\right) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Звідси

$$\frac{\left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{p}\right)}{|\overrightarrow{M_0M}||\vec{p}|} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

або

$$2 \cdot (2(x - 1) + 2(y - 2) - (z - 3)) =$$
$$= \pm\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2} \cdot 3\sqrt{3}.$$

Після спрощення отримуємо рівняння конуса

$$11x^2 + 11y^2 + 23z^2 - 32xy + 16xz + 16yz - 6x - 60y - 186z + 342 = 0.$$

Вправи

6.3.1. Запишіть рівняння круглого циліндра з радіусом $R = 2\sqrt{3}$, якщо пряма $\begin{cases} x = 3t \\ y = -t + 1 \\ z = 2 \end{cases}$ — його вісь.

6.3.2. Запишіть рівняння круглого циліндра з радіусом $R = \sqrt{7}$, якщо пряма $\frac{x}{-1} = \frac{y + 2}{0} = \frac{z - 1}{2}$ — його вісь.

6.3.3. Складіть рівняння циліндричної поверхні, напрямна якої лежить у площині Oxy і має рівняння $x^2 + 2xy + 3y^2 - x = 0$, а твірні паралельні до вектора $\vec{p} = (1; 0; 1)$.

6.3.4. Запишіть рівняння циліндричної поверхні, напрямною якої є лінія $\begin{cases} \frac{(y + 3)^2}{4} + (z - 1)^2 = 1 \\ x = 2 \end{cases}$, а твірні утворюють рівні кути з осями координат.

6.3.5. Запишіть рівняння циліндричної поверхні, напрямною якої є лінія $\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$, а твірні утворюють рівні кути з осями координат.

6.3.6. Знайдіть рівняння колового циліндра, що проходить через точку $M_0(1;-2;1)$, а його вісь — пряма $l: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+3}{-2}$.

6.3.7. Запишіть рівняння циліндра, напрямною якого є коло x^2+ $+y^2 = 1$, $z = 0$ і твірні утворюють рівні кути з осями координат.

6.3.8. Знайдіть рівняння циліндра, напрямна якого $x^2 - y^2 = z$, $x + y + z = 0$, а твірні ортогональні до площини напрямної.

6.3.9. Знайдіть рівняння циліндра, твірні якого паралельні до вектора $\vec{a} = (2;-3;4)$, а напрямна задається рівняннями $x^2 + y^2 = 9$, $z = 1$.

6.3.10. Знайдіть рівняння циліндра, твірні якого паралельні до вектора $\vec{a} = (-3;-1;2)$, а напрямна задається рівняннями $x^2 + z^2 = 4$, $y = -1$.

6.3.11. Запишіть рівняння конуса з вершиною у точці $A(2;4;-1)$ і напрямною, що задається рівнянням $\begin{cases} y^2 + (z-1)^2 = 4 \\ x = 1 \end{cases}$.

6.3.12. Запишіть рівняння конуса з вершиною у точці $A(-1;3;1)$ і напрямною, що задається рівнянням $\begin{cases} (x+2)^2 + y^2 = 9 \\ z = -3 \end{cases}$.

6.3.13. Запишіть рівняння конуса з вершиною у точці $A(-2;0;1)$ і напрямною, що задається рівнянням $\begin{cases} y^2 - z^2 = 3 \\ x = 1 \end{cases}$.

6.3.14. Запишіть рівняння конічної поверхні з вершиною у точці $A(0;1;2)$ і напрямною, що задається рівнянням $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$.

6.3.15. Запишіть рівняння конічної поверхні, напрямною якої є лінія $\begin{cases} xz - z = 1 \\ y = 3 \end{cases}$, а вершина розташована у точці $A(-1;2;1)$.

6.3.16. Запишіть рівняння конічної поверхні, напрямною якої є лінія $\begin{cases} xy + x = 5 \\ z = 2 \end{cases}$, а вершина розташована у точці $A(-1;1;0)$.

6.3.17. Запишіть рівняння колового конуса, якщо пряма $\dfrac{x-2}{1} =$

$= \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+3}{-2}$ є його віссю, точка $(1;-3;-1)$ — вершиною, а кожна твірна нахилена під кутом $\dfrac{\pi}{3}$ до осі конуса.

6.3.18. Запишіть рівняння колового конуса, якщо пряма $\dfrac{x}{-2} =$ $= \dfrac{y+5}{1} = \dfrac{z-1}{2}$ є його віссю, точка $(-2;-4;3)$ — вершиною, а кожна твірна нахилена під кутом $\dfrac{\pi}{4}$ до осі конуса.

6.3.19. Запишіть рівняння колового конуса, якщо, пряма $\dfrac{x+1}{5} =$ $= \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-1}$ є його віссю, точка $(4;3;-1)$ — вершиною, а точка $(1;0;3)$ належить поверхні конуса.

6.3.20. Запишіть рівняння колового конуса, якщо пряма $\dfrac{x-1}{4} =$ $= \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+1}{2}$ є його віссю, точка $(9;3;9)$ — вершиною, а точка $(0;1;-1)$ належить поверхні конуса.

6.3.21. Знайдіть рівняння колового конуса, який дотикається до площин Oxz і Oyz за прямими Ox і Oy.

6.3.22. Знайдіть рівняння колового конуса, який дотикається до площин Oxy і Oyz за прямими Ox і Oz.

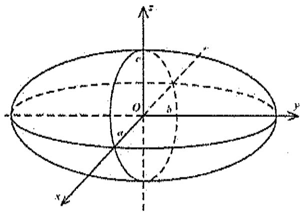
6.4. Основні поняття загальної теорії поверхонь другого порядку

Поверхнею другого порядку називається множина точок простору, координати яких у деякій афінній системі координат задовольняють рівняння

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz +$$
$$+ 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \qquad (6.5)$$

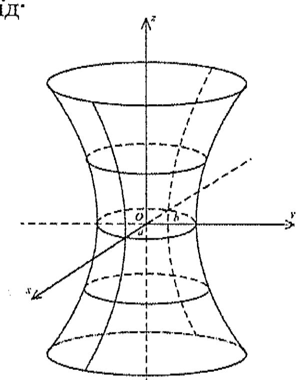
де коефіцієнти при членах другого степеня одночасно не дорівнюють нулю. Надалі вважаємо, що $a_{ij} = a_{ji}$, $i,j = 1,2,3,4$.

Теорема 6.4.1. *Для довільної поверхні другого порядку існує прямокутна система координат $Oxyz$, в якій рівняння цієї поверхні має один з таких виглядів:*

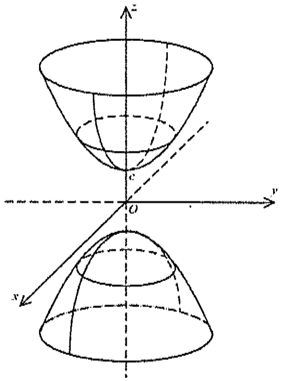


1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ — еліпсоїд;

2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ — уявний еліпсоїд·

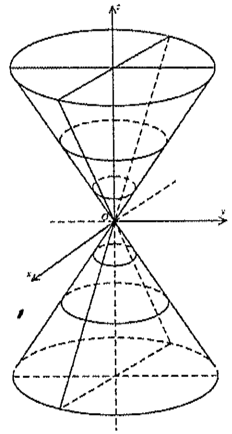


3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ — однопорожнинний гіперболоїд;

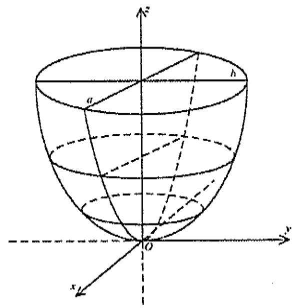


4) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ — двопорожнинний гіперболоїд;

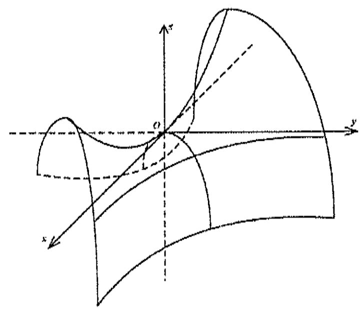
5) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ — конус;



6) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0$ — уявний конус;



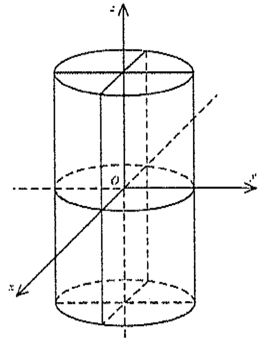
7) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z$ — еліптичний параболоїд;



8) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$ — гіперболічний параболоїд;

9) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — еліптичний

циліндр;

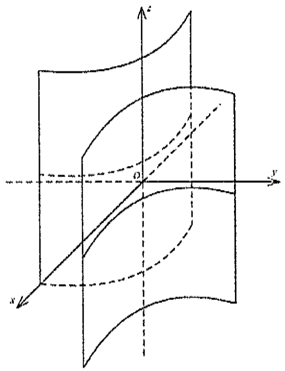


10) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ — уявний еліптичний

циліндр;

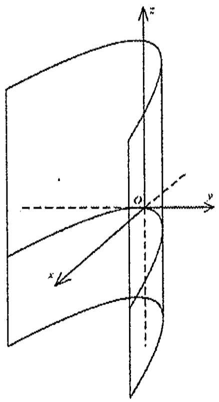
11) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — гіперболічний

циліндр;



12) $y^2 = 2px$ — параболічний

циліндр;



13) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — пара площин, які перетинаються;

14) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — пара уявних площин, які перетинаються;

15) $\dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — пара паралельних площин;

16) $\dfrac{y^2}{b^2} = -1$ — пара уявних паралельних площин;

17) $y^2 = 0$ — пара площин, які збігаються.

Приклад 6.4. Визначте тип поверхні другого порядку, яка задається рівнянням

$$x^2 + y^2 - 3z^2 - 2xy - 6xz - 6yz + 2x + 2y + 4z = 0.$$

Розв'язання. У лівій частині рівняння, користуючись методом Лагранжа, виділимо повні квадрати:

$$x^2 + y^2 - 3z^2 - 2xy - 6xz - 6yz + 2x + 2y + 4z =$$

$$= x^2 - 2xy - 6xz + 2x + y^2 - 3z^2 - 6yz + 2y + 4z =$$

$$= x^2 - 2x(y+3z-1) + (y+3z-1)^2 - (y+3z-1)^2 + y^2 - 3z^2 - 6yz + 2y + 4z =$$

$$= (x-y-3z+1)^2 - y^2 - 9z^2 - 1 - 6yz + 2y + 6z + y^2 - 3z^2 - 6yz + 2y + 4z =$$

$$= (x - y - 3z + 1)^2 - 12z^2 - 12yz + 4y + 10z - 1 =$$

$$= (x - y - 3z + 1)^2 - 12\left(z^2 + yz - \frac{5}{6}z\right) + 4y - 1 =$$

$$= (x - y - 3z + 1)^2 - 12\left(z^2 + 2z\left(\frac{y}{2} - \frac{5}{12}\right) + \left(\frac{y}{2} - \frac{5}{12}\right)^2 -\right.$$

$$\left. - \left(\frac{y}{2} - \frac{5}{12}\right)^2\right) + 4y - 1 = (x - y - 3z + 1)^2 - 12\left(z + \frac{y}{2} - \frac{5}{12}\right)^2 +$$

$$+3y^2 + \frac{25}{12} - 5y + 4y - 1 = (x - y - 3z + 1)^2 - 12\left(z + \frac{y}{2} - \frac{5}{12}\right)^2 +$$

$$+3\left(y^2 - 2\frac{y}{6} + \frac{1}{36} - \frac{1}{36}\right) + \frac{13}{12} = (x - y - 3z + 1)^2 -$$

$$-12\left(z+\frac{y}{2}-\frac{5}{12}\right)^2+3\left(y-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{12}+\frac{13}{12}=$$

$$=(x-y-3z+1)^2-12\left(z+\frac{y}{2}-\frac{5}{12}\right)^2+3\left(y-\frac{1}{6}\right)^2+1.$$

Прирівнюємо останній вираз до нуля і, зробивши заміну

$$\begin{cases} X=x-y-3z+1 \\ Y=z+\dfrac{y}{2}-\dfrac{5}{12} \\ Z=y-\dfrac{1}{6} \end{cases}, \tag{6.6}$$

отримуємо

$$X^2-12Y^2+3Z^2+1=0.$$

$$-X^2+\frac{Y^2}{\frac{1}{12}}-\frac{Z^2}{\frac{1}{3}}=1.$$

Отримане рівняння є рівнянням двопорожнинного гіперболоїда. Проте це рівняння не є канонічним рівнянням заданої поверхні, оскільки перетворення координат (6.6) не є ортогональними перетвореннями координат.

Приклад 6.5. Визначте тип поверхні другого порядку

$$3xy+2x+1=0.$$

Розв'язання. Введемо таку заміну: $\begin{cases} x=x'-y' \\ y=x'+y' \\ z=z' \end{cases}.$

Тоді рівняння поверхні матиме вигляд:

$$3(x'-y')(x'+y')+2(x'-y')+1=0$$

$$3x'^2-3y'^2+2x'-2y'+1=0$$

$$3(x'^2-\frac{2}{3}x')-3(y'^2+\frac{2}{3}y')+1=0$$

$$3(x'-\frac{1}{3})^2-3\cdot\frac{1}{9}-3(y'+\frac{1}{3})^2+3\cdot\frac{1}{9}+1=0$$

$$3(x'-\frac{1}{3})^2-3(y'+\frac{1}{3})^2=-1$$

$$3(y'+\frac{1}{3})^2-3(x'-\frac{1}{3})^2=1.$$

Використавши заміну $\begin{cases} X=y'+\frac{1}{3} \\ Y=x'-\frac{1}{3} \end{cases}$, отримуємо рівняння гіперболічного циліндра

$$3X^2-3Y^2=1.$$

Вправи

6.4.1. Визначте тип поверхні другого порядку:

а) $x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z+24=0$;
б) $x^2-y^2+3z^2-6x+6z+3=0$;
в) $x^2-z^2-2x+6z-8=0$;
г) $x^2+2y^2+3z^2-6z+3=0$;
ґ) $xy+3z^2-18z+54=0$;
д) $xz-6z+3=0$;
е) $yz+4x-6y+12z+25=0$;
є) $x^2+4xz-4z^2-6z+3=0$.

6.4.2. Визначте тип поверхні другого порядку:

а) $4x^2-2y^2-12z^2+4xy+12yz=0$;
б) $x^2-3y^2+4zx-2yz=0$;
в) $x^2+4y^2+z^2-4xy-4yz+2xz=0$;
г) $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y-10z=0$;
ґ) $4x^2+2y^2+10z^2-4xy+12xz-8yz=0$;
д) $4x^2+9y^2+z^2-12xy+4xz-6yz+4x-6y+2z-5=0$;
е) $x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz-14x-4y+14z+16=0$;
є) $2x^2+y^2+2z^2-2xy-2yz+x-4y-3z+2=0$;
ж) $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y+2z=0$.

6.5. Центр поверхні другого порядку

Точка S називається *центром* поверхні другого порядку, якщо разом з довільною точкою M цієї поверхні їй належить і точка M', симетрична до точки M стосовно точки S.

Теорема 6.5.1. *Точка S є центром поверхні (6.5) тоді і тільки тоді, коли її координати задовольняють систему рівнянь*

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0. \end{cases} \qquad (6.7)$$

Приклад 6.6. Знайдіть центр поверхні

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz + 6xz + 2x - 6y - 2z = 0.$$

Розв'язання. Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y + 3z + 1 = 0 \\ x + y - z - 3 = 0 \\ 3x - y + z - 1 = 0, \end{cases}$$

отримуємо $x = 1,\ y = 1,\ z = -1$. Це і є координати центра поверхні.

Вправи

6.5.1. Знайдіть центр поверхні другого порядку:

а) $2x^2 - y^2 + z^2 - 4x + 4z + 3 = 0$;
б) $3x^2 - 2y^2 + z^2 + 2xy - 2xz + 8yz + 4x + 6y - 12z - 1 = 0$;
в) $4x^2 + 2y^2 + 12z^2 - 4xy + 12xz + 8yz + 14x - 10y + 7 = 0$.
г) $5x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 12xy - 6xz + 12x - 36z = 0$;
ґ) $5x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz - 4yz - 4y - 4z + 4 = 0$;
д) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 6yz - 4xz - 8x + 10y = 0$;
е) $4x^2 + y^2 + 9z^2 - 4xy + 12xz - 6yz + 8x - 4y + 12z - 5 = 0$;
є) $x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 12x + 6y - 9 = 0$;
ж) $3x^2 + 2y^2 + 4yz - 2xz - 2x - 8z - 8 = 0$;
з) $x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 10xy + 6xz - 30yz - 2x - 2y = 0$;
и) $x^2 - 14y^2 + 10z^2 - 4xy + 6xz - 24yz + 2x + 20y + 8z - 9 = 0$.

6.5.2. Перенесіть початок системи координат у центр поверхні другого порядку:

а) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z = 0$;
б) $y^2 + 3xy + xz + 2yz + 3x + 2y = 0$;
в) $x^2 + 2y^2 - z^2 + 2x - 4y + 2z + 1 = 0$.

6.6. Перетин поверхні другого порядку з прямою. Асимптотичні напрямки. Асимптоти, дотичні прямі та прямолінійні твірні поверхні другого порядку

Нехай поверхню другого порядку задано загальним рівнянням (6.5), нехай деяка пряма проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і має напрямний вектор $\vec{p}(\alpha; \beta; \gamma)$. Запишемо параметричне рівняння цієї прямої

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t. \end{cases}$$

Знайдемо координати точок перетину поверхні та прямої. Для цього підставимо координати точок прямої в рівняння поверхні. Виконавши це, отримаємо рівняння

$$At^2 + 2Bt + C = 0 \qquad (6.8)$$

не вище другого порядку стосовно параметра t, де

$A = a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{33}\gamma^2 + 2a_{12}\alpha\beta + 2a_{13}\alpha\gamma + 2a_{23}\beta\gamma$,
$B = (a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma)x_0 + (a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma)y_0 +$
$+(a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma)z_0 + a_{41}\alpha + a_{42}\beta + a_{43}\gamma$,
$C = F(x_0, y_0, z_0)$.

Можливі такі випадки.

I. Нехай $A \neq 0$. Тоді:

1) якщо $\dfrac{D}{4} = B^2 - AC > 0$, то пряма перетинає поверхню в двох різних дійсних точках;

2) якщо $\dfrac{D}{4} = B^2 - AC < 0$, то пряма перетинає поверхню в двох уявних спряжених точках;

3) якщо $\dfrac{D}{4} = B^2 - AC = 0$, то пряма перетинає поверхню в двох точках, які збігаються. Така пряма називається *дотичною* до поверхні.

II. Нехай $A = 0$. Тоді:

1) якщо $B = 0$ і $C = 0$, то пряма належить поверхні. Така пряма називається *прямолінійною твірною* поверхні;

2) якщо $B = 0$ і $C \neq 0$, то пряма не перетинає поверхні в жодній точці. Така пряма називається *асимптотою* поверхні;

3) якщо $B \neq 0$, то пряма перетинає поверхню в одній точці.

Означення 6.6.1. Якщо пряма перетинає поверхню в одній точці, або не перетинає в жодній точці, або повністю їй належить, то казатимемо, що *пряма має асимптотичний напрямок стосовно поверхні*, а напрямний вектор $\vec{p}(\alpha;\beta;\gamma)$ цієї прямої називається *вектором асимптотичного напрямку* або просто асимптотичним вектором поверхні.

Очевидно, вектор $\vec{p}(\alpha;\beta;\gamma)$ є асимптотичним вектором поверхні тоді і тільки тоді, коли

$$a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{33}\gamma^2 + 2a_{12}\alpha\beta + 2a_{13}\alpha\gamma + 2a_{23}\beta\gamma = 0. \qquad (6.9)$$

Якщо всі вектори, які мають щодо заданої поверхні другого порядку асимптотичні напрямки, відкласти від фіксованої точки M_0, за яку зручно брати початок координат, то ці вектори заповнять конічну поверхню з вершиною M_0. Ця конічна поверхня називається *конусом асимптотичних напрямків* заданої поверхні. Якщо $M_0(0;0;0)$, то конічну поверхню задано рівнянням

$$a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz = 0.$$

Приклад 6.7. Знайдіть асимптотичні напрямки поверхні

$$x^2 + 4y^2 - 3z^2 - 4xy - \frac{5}{4}xz + 5y = 3 = 0,$$

які є перпендикулярними до осі Oz.

Розв'язання. Нехай вектор $\vec{p}(\alpha;\beta;\gamma)$ є асимптотичним напрямком. Оскільки вектор $\vec{p}$ має бути перпендикулярним до осі Oz, напрямним вектором якої є вектор $\vec{k} = (0;0;1)$, то $\vec{p}\cdot\vec{k} = 0$, звідки $\gamma = 0$. Для заданої поверхні рівняння (6.9) набуває вигляду

$$\alpha^2 + 4\beta^2 - 3\gamma^2 - 4\alpha\beta - \frac{5}{4}\alpha\gamma = 0.$$

Оскільки $\gamma = 0$, то $\alpha^2 + 4\beta^2 - 4\alpha\beta = 0$ або $(\alpha - 2\beta)^2 = 0$. Отож, асимптотичними напрямками є вектори, які колінеарні до вектора $\vec{p} = (2;1;0)$.

Приклад 6.8. Яку умову повинні задовольняти коефіцієнти загального рівняння поверхні другого порядку для того, щоб вісь ординат:

а) була дотичною;

б) мала асимптотичний напрямок;

в) була асимптотою;

г) була твірною;

ґ) не мала дійсних точок перетину з поверхнею?

Розв'язання. Спочатку запишемо параметричне рівняння осі ординат $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ і підставимо це рівняння в загальне рівняння поверхні другого порядку (6.5), отримуємо

$$a_{22}t^2 + 2a_{24}t + a_{44} = 0. \qquad (6.10)$$

а) Щоб вісь ординат була дотичною, необхідно, щоб дискримінант D квадратного рівняння (6.10) дорівнював нулеві, тобто

$$4a_{24}^2 - 4a_{22}a_{44} = 0.$$

б) Підставимо в рівняння (6.9) координати напрямного вектора осі ординат і отримуємо $a_{22} = 0$.

в) Вісь ординат буде асимптотою, якщо $a_{22} = a_{24} = 0$ (коефіцієнти при t^2 і t дорівнюють нулеві).

г) Вісь ординат буде твірною, якщо $a_{22} = a_{24} = a_{44} = 0$ (всі коефіцієнти нулі).

ґ) Вісь ординат не матиме дійсних точок перетину з поверхнею, якщо дискримінант D квадратного рівняння (6.10) буде від'ємним, тобто

$$4a_{24}^2 - 4a_{22}a_{44} < 0.$$

Приклад 6.9. Запишіть рівняння дотичної до поверхні $xy - x + z = 0$ в точці $M_0(1;2;-1)$, якщо ця дотична є перпендикулярною до вектора $\vec{q} = (1;2;3)$.

Розв'язання. Нехай пряма l задається точкою M_0 і деяким напрямним вектором $\vec{p} = (\alpha;\beta;\gamma)$. Оскільки точка M_0 належить поверхні, то коефіцієнт C з рівняння (6.8) буде дорівнювати нулеві. Тому пряма l буде дотичною до поверхні тоді і тільки тоді, коли координати напрямного вектора $\vec{p}$ задовольняють рівняння $B = 0$ (див. означення дотичної) або

$$\frac{1}{2}\beta\cdot 1+\frac{1}{2}\alpha\cdot 2-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\gamma=0.$$

Звідси $\alpha+\beta+\gamma=0$.

Позаяк дотична l повинна бути перпендикулярною до вектора $\vec{q}$, то скалярний добуток векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$ дорівнює нулеві, а отже, $\alpha+2\beta+3\gamma=0$.

Розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha+2\beta+3\gamma=0\end{cases}$, отримуємо, що

$$\beta=-2\gamma,\ \alpha=\gamma.$$

Прийнявши $\gamma=1$, матимемо $\alpha=1$, $\beta=-2$ і напрямний вектор $\vec{p}$ має координати $(1;-2;1)$. Тоді рівняння дотичної буде таким:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{1}.$$

Приклад 6.10. Знайдіть прямолінійні твірні поверхні

$$x^2+y^2+z^2-2xz-yz+4x+2y-5z+4=0,$$

які проходять через точку $(-1;-1;0)$.

Розв'язання. Запишемо параметричне рівняння прямої, яка проходить через задану точку

$$\begin{cases}x=-1+\alpha t\\ y=-1+\beta t\\ z=\gamma t.\end{cases}$$

Підставимо рівняння прямої в рівняння поверхні й одержимо

$$\left(\alpha^2-2\alpha\gamma-\beta\gamma+\beta^2+\gamma^2\right)t^2+(2\alpha-2\gamma)t=0.$$

Пряма належатиме поверхні тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases}\alpha^2-2\alpha\gamma-\beta\gamma+\beta^2+\gamma^2=0\\ 2\alpha-2\gamma=0.\end{cases}$$

З цієї системи отримуємо $\alpha=\gamma$, тоді $\beta(\beta-\gamma)=0$ і $\beta=0$ або $\beta=\gamma$. Отож, шукані твірні задаються рівняннями

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z}{1}\quad\text{і}\quad\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1}.$$

Теорема 6.6.2. *Прямолінійними твірними однопорожнинного гіперболоїда, заданого в канонічній системі координат рівнянням*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

є дві сім'ї прямих, які задаються системами рівнянь

$$\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{cases},\quad\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right),\end{cases}$$

де λ — довільне число, відмінне від нуля.

Теорема 6.6.3. *Прямолінійними твірними гіперболічного параболоїда, заданого в канонічній системі координат рівнянням*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z,$$

є дві сім'ї прямих, які задаються системами рівнянь

$$\begin{cases}\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2z\\ \frac{1}{\lambda}\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=1\end{cases},\quad\begin{cases}\lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2z\\ \frac{1}{\lambda}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=1,\end{cases}$$

де λ — довільне число, відмінне від нуля.

Вправи

6.6.1. Яку умову мають задовольняти коефіцієнти загального рівняння поверхні другого порядку для того, щоб вісь абсцис:

а) була дотичною;

б) мала асимптотичний напрямок;

в) була асимптотою;

г) була твірною;

ґ) не мала дійсних точок перетину з поверхнею?

6.6.2. Знайдіть точки перетину:

а) поверхні $z^2+xy-yz-5x=0$ з прямою $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z-10}{7}$;

б) поверхні $5x^2+9y^2+9z^2-12xy-6xz+12x-36z=0$ з прямою $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-4}{1}$;

г) поверхні $x^2-2y^2+z^2-2xy+4xz-yz+3x-5z=0$ з прямою $\frac{x+3}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z}{0}$.

6.6.3. Знайдіть рівняння тих прямих, які проходять через точку $A(1;-1;3)$ і мають асимптотичні напрямки стосовно поверхні $2x^2+y^2+2xy-3x+z-1=0$.

6.6.4. Знайдіть прямолінійні твірні однопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$, які проходять через точку $A(6;2;8)$.

6.6.5. Знайдіть прямолінійні твірні гіперболічного параболоїда $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=z$, які паралельні до площини $3x+2y-4z=0$.

6.6.6. Знайдіть прямолінійні твірні гіперболічного параболоїда $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{8}=2z$, які паралельні до площини $2x+3y-z=0$.

6.6.7. Знайдіть точку перетину прямолінійних твірних однопорожнинного гіперболоїда $x^2+y^2-z^2=1$, які утворено перетином гіперболоїда площиною, паралельною до площини $x+y-z+1=0$. Визначте кут між цими твірними.

6.6.8. Знайдіть точку перетину прямолінійних твірних гіперболічного параболоїда $x^2-y^2=2z$, які утворено перетином гіперболоїда площиною, паралельною до площини $x-y+z+1=0$. Визначте кут між цими твірними.

6.6.9. Знайдіть прямолінійні твірні поверхні $x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-yz+4x+3y-5z+4=0$, які проходять через точку $A(-1;-1;1)$.

6.6.10. Знайдіть прямолінійні твірні гіперболічного параболоїда $5y^2-z^2-6x+3=0$, які проходять через точку $A(-1;0;3)$.

6.6.11. Знайдіть ті прямолінійні твірні поверхні $x^2+y^2+5z^2-6xy+2yz-2xz-12=0$, які паралельні до прямої $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{-1}$.

6.6.12.* Знайдіть множину точок, які лежать на гіперболічному параболоїді $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$, через кожну з яких проходять дві взаємно перпендикулярні твірні.

6.7. Діаметральні площини поверхні другого порядку

Відрізок, який сполучає дві довільні точки поверхні другого порядку, називається *хордою* цієї поверхні.

Теорема 6.7.1. *Множина середин хорд поверхні (6.5), паралельних до неасимптотичного напрямку $\vec{p}=(\alpha;\beta;\gamma)$, є площиною.*

Ця площина називається *діаметральною площиною* поверхні (6.5), яка спряжена з напрямком $\vec{p}$ і задається рівнянням

$$(a_{11}\alpha+a_{12}\beta+a_{13}\gamma)x+(a_{21}\alpha+a_{22}\beta+a_{23}\gamma)y+(a_{31}\alpha+a_{32}\beta+a_{33}\gamma)z+$$
$$+a_{41}\alpha+a_{42}\beta+a_{43}\gamma=0. \tag{6.11}$$

Приклад 6.11. Знайдіть діаметральну площину поверхні

$$x^2+2y^2-z^2-2xy-2yz+2xz-4x-1=0,$$

яка паралельна до площини $x+y+z=0$.

Розв'язання. Діаметральна площина заданої поверхні, яка спряжена з напрямком $\vec{p}=(\alpha;\beta;\gamma)$, задана рівнянням

$$(\alpha-\beta+\gamma)x+(-\alpha+2\beta-\gamma)y+(\alpha-\beta-\gamma)z-2\alpha=0.$$

З умови паралельності площин одержуємо

$$\frac{\alpha-\beta+\gamma}{1}=\frac{-\alpha+2\beta-\gamma}{1}=\frac{\alpha-\beta-\gamma}{1}$$

або

$$\begin{cases}\alpha-\beta+\gamma=-\alpha+2\beta-\gamma\\ \alpha-\beta+\gamma=\alpha-\beta-\gamma\end{cases}, \text{ звідки } \begin{cases}2\alpha-3\beta+2\gamma=0\\ 2\gamma=0.\end{cases}$$

Нехай $\beta=2$, тоді $\alpha=3$.

Отже, шукана площина спряжена з напрямком $(3;2;0)$ і задається рівнянням

$$x+y+z-6=0.$$

Вправи

6.7.1. Знайдіть діаметральну площину поверхні $3x^2 + 2y^2 - z^2 + 3xy - 2yz + 7 = 0$, яка проходить через точки $A(-1;2;0), B(3;0;-2)$.

6.7.2. Знайдіть діаметральну площину поверхні $2x^2 - y^2 + z^2 - 4x + 4z + 3 = 0$, яка проходить через точки $A(0;-2;1), B(2;-3;0)$.

6.7.3. Знайдіть діаметральну площину поверхні $x^2 - z^2 + 2xy - yz + 3y + 5 = 0$, яка перпендикулярна до прямої $\frac{x+5}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{0}$.

6.7.4. Знайдіть діаметральну площину поверхні $y^2 + z^2 + 2xy + 3yz - 3y - 7 = 0$, яка перпендикулярна до прямої $\frac{x}{-2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{1}$.

6.7.5. Запишіть рівняння тієї діаметральної площини для поверхні $4x^2 + 4y^2 + 12z^2 - 10xy + 4yz + 4xz - 16x - 16y + 16z - 3 = 0$, яка паралельна до площини $x + 2y - 3z + 5 = 0$.

6.7.6. Запишіть рівняння тієї діаметральної площини для поверхні $4x^2 + 4y^2 + 12z^2 - 10xy + 4yz + 4xz - 16x - 16y + 16z - 3 = 0$, яка паралельна до площини $2x + y - z + 1 = 0$.

6.7.7. Запишіть рівняння тієї діаметральної площини для поверхні $2x^2 - 5y^2 - 3z^2 - 2xy - 4xz + 2yz - 2x - 10y - 2z - 1 = 0$, яка перпендикулярна до осі ординат.

6.7.8. Запишіть рівняння тієї діаметральної площини для поверхні $x^2 + 3z^2 - 6xy + 8x + 5 = 0$, яка містить пряму $\frac{x+3}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{3}$.

6.7.9. Знайдіть кут між тією діаметральною площиною для поверхні $3x^2 - 5y^2 + 4xy - 6yz + 4x + 2y = 0$, яка містить вісь Oy і спряженими до неї хордами.

6.7.10. Задано поверхню $x^2 - 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 6yz + 8x - 2z + 3 = 0$, та одну з її діаметральних площин $y - 2z + 9 = 0$. Знайдіть спряжену до заданої діаметральну площину.

6.7.11. Знайдіть головні осі для поверхні $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy - 2xz + 2yz - 6x + 6y - 6z + 9 = 0$.

6.7.12. Знайдіть головні діаметральні площини для поверхні $x^2 + y^2 - 3z^2 - 6xz - 6yz - 2xy + 2x + 2y + 4z = 0$.

6.7.13.* Знайдіть спільну діаметральну площину для трьох поверхонь $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 11 = 0$, $3y^2 + 4xy - 8xz + 6z + 5 = 0$, $8x^2 - 3y^2 + 7z^2 + 4xy - 9xz - 15 = 0$.

6.8. Дотична площина до поверхні другого порядку

Нехай поверхня другого порядку задана загальним рівнянням (6.5), а точка $P(x_0; y_0; z_0)$ лежить на цій поверхні.

Теорема 6.8.1. *Геометричне місце прямих, які проходять через точку P і дотикаються до поверхні в цій точці, є площиною. Ця площина називається дотичною площиною до поверхні в точці P і задається рівнянням*

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14})x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24})y +$$

$$+(a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34})z + (a_{41}x_0 + a_{42}y_0 + a_{43}z_0 + a_{44}) = 0. \quad (6.12)$$

Приклад 6.12. Задано еліпсоїд $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$ і пряму $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{0}$. Запишіть рівняння площини, яка проходить через задану пряму і дотикається заданого еліпсоїда.

Розв'язання. Нехай $(x_0; y_0; z_0)$ — точка дотику заданого еліпсоїда і шуканої площини. Рівняння дотичної площини до еліпсоїда в цій точці набуває вигляду

$$\frac{x_0 x}{16} + \frac{y_0 y}{12} + \frac{z_0 z}{4} = 1.$$

Задана пряма проходить через точку $(2;3;2)$ і має напрямний вектор $(-2;1;0)$. Точка $(2;3;2)$ має лежати в шуканій дотичній площині, тому

$$\frac{2x_0}{16} + \frac{3y_0}{12} + \frac{2z_0}{4} = 1.$$

Позаяк вектор $(-2;1;0)$ компланарний до заданої площини, то

$$\frac{2x_0}{16} - \frac{y_0}{12} = 0.$$

Оскільки точка $(x_0; y_0; z_0)$ належить еліпсоїду, то

$$\frac{x_0^2}{16} + \frac{y_0^2}{12} + \frac{z_0^2}{4} = 1.$$

Отож, одержуємо систему рівнянь $\begin{cases} \frac{x_0}{8}+\frac{y_0}{4}+\frac{z_0}{2}=1 \\ \frac{x_0}{8}-\frac{y_0}{12}=0 \\ \frac{x_0^2}{16}+\frac{y_0^2}{12}+\frac{z_0^2}{4}=1. \end{cases}$

З другого рівняння знаходимо $y_0=\frac{3}{2}x_0$. Підставляючи значення y_0 в перше рівняння, знайдемо $z_0 = 2-x_0$. Знайдені y_0 і z_0 підставляємо в третє рівняння системи, отримуємо $x_0^2-2x_0=0$. Звідси $x_{0,1}=0$, $x_{0,2}=2$. Тому шуканими точками дотику є дві точки $(0;0;2)$ і $(2;3;0)$, а відповідні дотичні площини задають рівняннями

$$z=2 \quad \text{і} \quad x+2y-8=0.$$

Вправи

6.8.1. Запишіть рівняння дотичної площини до поверхні $x^2-2z^2-4xy+yz+2y-2=0$ в точці $M(0;1;0,5)$.

6.8.2. Запишіть рівняння дотичної площини до поверхні $5x^2-y^2+z^2+4xy+6xz+2x+4y+6z-8=0$ в точці $M(0;-4;4)$.

6.8.3. Запишіть рівняння площини, дотичної до поверхні $4x^2+6y^2+4z^2+4xz-8y-4z+3=0$, якщо ця площина паралельна до площини $x+2y+2=0$.

6.8.4. Знайдіть рівняння дотичної площини до еліпсоїда $2x^2+4y^2+z^2-12=0$, яка проходить через точку $A(1;-1;2)$ і паралельна до осі Ox.

6.8.5. Запишіть рівняння дотичної площини до поверхні $5x^2-8y^2+5z^2+6xz+4x-2z=0$, яка проходить через вісь Oy.

6.8.6. Задано еліпсоїд $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$ і пряму $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{0}$. Запишіть рівняння площини, яка проходить через задану пряму і дотикається до даного еліпсоїда.

6.8.7. Задано гіперболічний параболоїд $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=2z$ і пряму $\frac{x-15}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z-11}{-1}$. Запишіть рівняння площини, яка проходить через задану пряму і дотикається до заданого параболоїда.

6.9. Зведення загального рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду

Нехай у деякій прямокутній системі координат $Oxyz$ поверхня задана загальним рівнянням (6.5).

Нехай $\vec{i}=(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)$, $\vec{j}=(\beta_1;\beta_2;\beta_3)$, $\vec{k}=(\gamma_1;\gamma_2;\gamma_3)$ — власні вектори матриці $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, які відповідають її власним значенням λ_1, λ_2, λ_3. Це означає, що виконуються рівності $A\vec{i}=\lambda_1\vec{i}$, $A\vec{j}=\lambda_2\vec{j}$, $A\vec{k}=\lambda_3\vec{k}$.

Теорема 6.9.1. *Якщо від системи координат $Oxyz$ перейти до нової системи координат $Ox'y'z'$, базовими векторами якої є ортонормована система власних векторів матриці A, то в цій системі рівняння зведеться до вигляду*

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2+2a'_{14}x'+2a'_{24}y'+2a'_{34}z'+a'_{44}=0.$$

За допомогою паралельного перенесення системи координат $Ox'y'z'$ це рівняння можна звести до одного з п'яти типів:

(I) $\quad Ax''^2+By''^2+Cz''^2+D=0,\quad$ *де* $A\cdot B\cdot C\neq 0$;

(II) $\quad Ax''^2+By''^2+Cz''=0,\quad$ *де* $A\cdot B\cdot C\neq 0$;

(III) $\quad Ax''^2+By''^2+C=0,\quad$ *де* $A\cdot B\neq 0$;

(IV) $\quad Ay''^2+Bx''=0,\quad$ *де* $A\cdot B\neq 0$;

(V) $\quad Ay''^2+B=0,\quad$ *де* $A\neq 0$.

Далі легко описати канонічне рівняння поверхні (6.5).

З цих міркувань випливає такий алгоритм зведення загального рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду.

1. Складаємо характеристичне рівняння поверхні другого порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad (6.13)$$

і знаходимо його корені λ_1, λ_2, λ.

2. Знаходимо власні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ матриці A, які відповідають знайденим власним значенням.

Оскільки матриця A симетрична, то різним власним значенням відповідають взаємно ортогональні власні вектори. Якщо характеристичне рівняння (6.13) має кратний корінь, то для нього треба підібрати відповідні ортогональні власні вектори, кількість яких відповідає кратності кореня, що, як відомо з курсу лінійної алгебри, завжди можливо. В нашому випадку ці вектори потрібно пронормувати, розглянувши замість них одиничні вектори $\vec{i} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\vec{j} = \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$, $\vec{k} = \dfrac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$.

3. Складаємо формули переходу від системи координат $Oxyz$ до нової системи $Ox'y'z'$

$$\begin{cases} x = \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z' \\ y = \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z' \\ z = \alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z', \end{cases}$$

де $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3)$, $(\beta_1; \beta_2; \beta_3)$, $(\gamma_1; \gamma_2; \gamma_3)$ координати знайдених базових векторів у системі координат $Oxyz$.

4. Підставляючи ці формули в початкове рівняння поверхні, отримуємо рівняння вигляду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a'_{44} = 0.$$

5. Виділяючи в одержаному рівнянні повні квадрати та застосовуючи паралельне перенесення системи координат, зводимо рівняння заданої поверхні до канонічного вигляду.

Приклад 6.13. Зведіть до канонічного вигляду рівняння поверхні

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0.$$

Розв'язання. Складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2(5-\lambda) + 3 + 3 - 9(5-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) = 0$$

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0.$$

Звідси $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 6$. Знаходимо відповідні власні вектори.

Для $\lambda_1 = 3$ отримаємо

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad \begin{cases} -2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Нехай $\alpha_3 = 1$, тоді $\alpha_2 = -1$ і $\alpha_1 = 1$. Отже, $\vec{a} = (1; -1; 1)$.

Для $\lambda_2 = -2$ одержимо

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 3\beta_1 + \beta_2 + 3\beta_3 = 0 \\ \beta_2 = 0. \end{cases}$$

Нехай $\beta_3 = -1$, тоді $\beta_1 = 1$. Отже, $\vec{b} = (1; 0; -1)$.

Для $\lambda_3 = 6$ матимемо

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ \gamma_2 - 2\gamma_3 = 0. \end{cases}$$

Нехай $\gamma_3 = 1$, тоді $\gamma_2 = 2$ і $\gamma_1 = 1$. Отже, $\vec{c} = (1; 2; 1)$.

Пронормуємо знайдені власні вектори

$$\vec{i} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$\vec{j} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$\vec{k} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Складаємо формули переходу до нової системи координат

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y' + \dfrac{1}{\sqrt{6}}z' \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x' + \dfrac{2}{\sqrt{6}}z' \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x' - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y' + \dfrac{1}{\sqrt{6}}z'. \end{cases}$$

Підставивши ці формули в рівняння поверхні, отримуємо

$$3x'^2 - 2y'^2 + 6z'^2 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z'\right) +$$

$$+6\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{2}{\sqrt{6}}z'\right) + 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z'\right) = 0$$

$$\text{або } 3x'^2 - 2y'^2 + 6z'^2 - \frac{6}{\sqrt{3}}x' - \frac{4}{\sqrt{2}}y' + \frac{12}{\sqrt{6}}z' = 0.$$

Виділимо повні квадрати

$$3\left(x' - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2\left(y' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 6\left(z' + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + 1 = 0.$$

Виконавши паралельне перенесення $\begin{cases} X = x' - \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ Y = y' + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ Z = z' + \dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{cases}$, отримуємо рівняння

$$3X^2 - 2Y^2 + 6Z^2 - 1 = 0 \quad \text{або} \quad \frac{X^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{Z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} = 1.$$

Отож, ми отримали канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда.

Приклад 6.14. Зведіть до канонічного вигляду рівняння поверхні

$$x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0.$$

Розв'язання. Складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Звідси $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 6$. Знаходимо відповідні власні вектори.
Для $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ отримаємо

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{або } 2\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0.$$

Нехай $\alpha_1 = 1, \alpha_3 = 0$, тоді $\alpha_2 = -2$. Приймемо $\vec{m} = (1; -2; 0)$. Нехай $\alpha_1 = 0, \alpha_3 = 1$, тоді $\alpha_2 = 2$. Приймемо $\vec{n} = (0; 2; 1)$. Ортогоналізуємо систему векторів $\vec{m}$, $\vec{n}$. Нехай $\vec{a} = \vec{m} = (1; -2; 0)$, $\vec{b} = \mu\vec{m} + \vec{n}$ такі, що $\vec{a} \perp \vec{b}$. Тоді $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0$ або $(\vec{m}, \mu\vec{m} + \vec{n}) = 0$. З останньої рівності знаходимо

$$\mu = \frac{(\vec{m}, \vec{n})}{(\vec{m}, \vec{m})} = \frac{4}{5}.$$

Отже, $\vec{b} = \frac{4}{5}\vec{m} + \vec{n} = \left(\frac{4}{5}; \frac{2}{5}; 1\right)$.
Для $\lambda_3 = 6$ матимемо

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & -4 \\ 2 & -8 & -2 \\ -4 & -2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{звідки}$$

$$\begin{cases} -5\gamma_1 + 2\gamma_2 - 4\gamma_3 = 0 \\ 2\gamma_2 - 8\gamma_2 - 2\gamma_3 = 0 \\ -4\gamma_1 - 2\gamma_2 - 5\gamma_3 = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \gamma_1 + \gamma_3 = 0 \\ 2\gamma_2 + \gamma_3 = 0. \end{cases}$$

Нехай $\gamma_3 = -2$, тоді $\gamma_1 = 2$ і $\gamma_2 = 1$. Отож, $\vec{c} = (2; 1; -2)$.
Пронормуємо знайдені власні вектори

$$\vec{i} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}}; 0\right)$$
$$\vec{j} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \left(\frac{4}{3\sqrt{5}}; \frac{2}{3\sqrt{5}}; \frac{5}{3\sqrt{5}}\right)$$
$$\vec{k} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right).$$

Складаємо формули переходу до нової системи координат

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{4}{3\sqrt{5}}y' + \dfrac{2}{3}z' \\ y = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{2}{3\sqrt{5}}y' + \dfrac{1}{3}z' \\ z = \dfrac{5}{3\sqrt{5}}y' - \dfrac{2}{3}z'. \end{cases}$$

Підставивши ці формули в рівняння поверхні, отримуємо

$$-3x'^2 - 3y'^2 + 6z'^2 - 14\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{4}{3\sqrt{5}}y' + \frac{2}{3}z'\right) -$$

$$-4\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{3\sqrt{5}}y' + \frac{1}{3}z'\right) + 14\left(\frac{5}{3\sqrt{5}}y' - \frac{2}{3}z'\right) + 16 = 0$$

$$\text{або} \;\; -3x'^2 - 3y'^2 + 6z'^2 - \frac{6}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' - 20z' + 16 = 0.$$

Виділимо повні квадрати та одержимо

$$-3\left(x' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 3\left(y' - \frac{1}{3\sqrt{5}}\right)^2 + 6\left(z' - \frac{5}{3}\right)^2 = 0.$$

Виконавши паралельне перенесення $\begin{cases} X = x' + \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ Y = y' - \dfrac{1}{3\sqrt{5}} \\ Z = z' - \dfrac{5}{3} \end{cases}$, отримуємо канонічне рівняння в новій системі координат O_{XYZ}.

$\dfrac{X^2}{2} + \dfrac{Y^2}{2} - \dfrac{Z^2}{1} = 0$ — це канонічне рівняння колового конуса.

Вправи

6.9.1. Зведіть до канонічного вигляду рівняння поверхні другого порядку:

а) $2xy + 3x - 5 = 0$;
б) $4yz - 5x + 2z - 1 = 0$;
в) $x^2 - 2yz + 2x - 10 = 0$;
г) $y^2 - 2xz - 8y + 1 = 0$;
ґ) $-8xy + 16x - 16y + z - 1 = 0$;
д) $2yz + 6x - 12y + 2z + 5 = 0$;
е) $4xy + 12y + z - 10 = 0$;
є) $xz + 12y + 2z - 10 = 0$.

6.9.2. Зведіть до канонічного вигляду рівняння поверхні другого порядку:

а) $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$;
б) $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 4yz - 8zx - 28x + 2y + 16z + 45 = 0$;
в) $x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 4yz + 2xz = 0$;
г) $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0$;
ґ) $7x^2 + 7y^2 + 16z^2 - 10xy - 8xz - 8yz - 16x - 16y - 8z + 72 = 0$;
д) $4x^2 + 9y^2 + z^2 - 12xy + 4xz - 6yz + 4x - 6y + 2z - 5 = 0$;
е) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0$;
є) $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + 4x + 4z = 0$;
ж) $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0$;
з) $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$;
и) $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$.

6.10. Метод ортогональних інваріантів зведення загального рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду

Теорема 6.10.1. *Функції*

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \; I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \; K_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

є ортогональними інваріантами ортогонального перетворення поверхні другого порядку (6.5) при переході від однієї прямокутної системи координат до іншої прямокутної системи координат.

Теорема 6.10.2. *Функції*

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{14} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$K_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} \\ a_{14} & a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{13} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

є ортогональними напівінваріантами ортогонального перетворення поверхні другого порядку (6.5) при переході від однієї прямокутної системи координат до іншої прямокутної системи координат.

Якщо при переході від однієї прямокутної системи координат до іншої рівняння (6.5) набуває вигляду

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + a'_{44} = 0,$$

то K_3 стає ортогональним інваріантом, а якщо рівняння (6.5) набуває вигляду

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{14}x' + a'_{44} = 0,$$

то K_2 і K_3 стають ортогональними інваріантами.

Теорема 6.10.3. *У таблиці*

Номер	*Ознака групи*
I	$I_3 \neq 0$
II	$I_3 = 0, K_4 \neq 0$
III	$I_3 = 0, K_4 = 0, I_2 \neq 0$
IV	$I_3 = 0, K_4 = 0, I_2 = 0, K_3 \neq 0$
V	$I_3 = 0, K_4 = 0, I_2 = 0, K_3 = 0, I_1 \neq 0$

наведено необхідні та достатні умови, щоб поверхня другого порядку належала до однієї з п'яти груп (див. Теорему 6.9.1) поверхонь.

Нехай поверхня другого порядку задається загальним рівнянням (6.5).

1. Якщо ця поверхня є поверхнею *I* групи, то її найпростіше рівняння набуватиме вигляду

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + \frac{K_4}{I_3} = 0, \tag{6.14}$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — корені характеристичного рівняння

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0. \tag{6.15}$$

2. Якщо ця поверхня є поверхнею *II* групи, то її найпростіше рівняння набуватиме вигляду

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = \sqrt{-\frac{K_4}{I_2}}Z. \tag{6.16}$$

Тут λ_1, λ_2 — відмінні від нуля корені характеристичного рівняння (6.15).

3. Якщо ця поверхня є поверхнею *III* групи, то її найпростіше рівняння набуватиме вигляду

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0, \tag{6.17}$$

де λ_1, λ_2 — відмінні від нуля корені характеристичного рівняння (6.15).

4. Якщо ця поверхня є поверхнею *IV* групи, то її найпростіше рівняння набуде вигляду

$$I_1 X^2 = 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1}}Y. \tag{6.18}$$

5. Якщо ж ця поверхня є поверхнею *V* групи, то її найпростіше рівняння набуде вигляду

$$I_1 X^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0. \tag{6.19}$$

Залежно від знаків коренів характеристичного рівняння та знаків інваріантів, напівінваріантів ми можемо отримати канонічне рівняння однієї з 17-ти поверхонь.

Для цього зручно користуватися такою таблицею:

Центр	Ознака	Номер	Інвар.	Пов-ня	Кан. рівняння	Рівняння
Точка	$I_3 \neq 0$	I.1	$I_2 > 0$, $I_1 I_3 > 0$, $K_4 < 0$	Еліпсоїд	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + \frac{K_4}{I_3} = 0$
		I.2	$I_2 > 0$, $I_1 I_3 > 0$, $K_4 > 0$	Уявний еліпсоїд	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$	
		I.3	$I_2 > 0$, $I_1 I_3 > 0$, $K_4 = 0$	Уявний конус	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	
		I.4	$I_2 \leqslant 0$ або $I_1 I_3 \leqslant 0$, $K_4 > 0$	Однопорожн. гіперболоїд	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	
		I.5	$I_2 \leqslant 0$ або $I_1 I_3 \leqslant 0$, $K_4 < 0$	Двопорожн. гіперболоїд	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	
		I.6	$I_2 \leqslant 0$ або $I_1 I_3 \leqslant 0$, $K_4 = 0$	Конус	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	
Немає центра	$I_3 = 0, K_4 \neq 0$	II.7	$K_4 < 0$	Еліптичний параболоїд	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$	$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 2\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}}\,Z$
		II.8	$K_4 > 0$	Гіперболічний параболоїд	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$	

Центр	Ознака	Номер	Інвар.	Пов-ня	Кан. рівняння	Рівняння
Пряма центрів	$I_3 = 0, K_4 = 0, I_2 \neq 0$	III.9	$I_2 > 0$, $I_1 K_3 < 0$	Еліптичний циліндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0$
		III.10	$I_2 > 0$, $I_1 K_3 > 0$	Уявний еліптичний циліндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	
		III.11	$K_3 = 0$	Дві уявні площини, які перетин.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	
		III.12	$I_2 < 0$, $K_3 \neq 0$	Гіперболічний циліндр	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	
		III.13	$I_2 < 0$, $K_3 = 0$	Дві площ., які перетин.	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	
Немає центра	$I_3 = 0, K_4 = 0$, $I_2 = 0, K_3 \neq 0$	IV.14	$I_1 \neq 0$	Параболічний циліндр	$x^2 = 2py$	$I_1 X^2 = 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1}}\,Y$
Площина центрів	$I_3 = 0, K_4 = 0$, $I_2 = 0, K_3 = 0$	V.15	$K_2 < 0$, $I_1 \neq 0$	Дві паралельні площини	$x^2 - a^2 = 0$	$I_1 X^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0$
		V.16	$K_2 > 0$, $I_1 \neq 0$	Дві уявні паралельні площини	$x^2 + a^2 = 0$	
		V.17	$K_2 = 0$, $I_1 \neq 0$	Дві площ., які збіг.	$x^2 = 0$	

Означення 6.10.4. *Головним напрямком* поверхні другого порядку називається такий неасимптотичний напрямок, для якого діаметральна площина, спряжена до нього, перпендикулярна до цього напрямку.

Згідно з означенням кожен головний напрямок $\vec{p} = (\alpha;\beta;\gamma)$ є колінеарним до нормального вектора

$$\vec{p}^* = (a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma; a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma; a_{13}\alpha + a_{23}\beta + a_{33}\gamma)$$

спряженої до напрямку $\vec{p}$ діаметральної площини. Отже, знайдеться такий коефіцієнт колінеарності $\lambda \in \mathbb{R}$, для якого

$$\frac{a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma}{\alpha} = \frac{a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma}{\beta} = \frac{a_{13}\alpha + a_{23}\beta + a_{33}\gamma}{\gamma} = \lambda.$$

Звідси

$$\begin{cases} a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = \lambda\alpha \\ a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma = \lambda\beta \\ a_{13}\alpha + a_{23}\beta + a_{33}\gamma = \lambda\gamma \end{cases} \tag{6.20}$$

або

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0 \\ a_{12}\alpha + (a_{22} - \lambda)\beta + a_{23}\gamma = 0 \\ a_{13}\alpha + a_{23}\beta + (a_{33} - \lambda)\gamma = 0 \end{cases}.$$

Оскільки вектор $\vec{p} = (\alpha;\beta;\gamma)$ ненульовий, то

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & (a_{22} - \lambda) & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & (a_{33} - \lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Розгорнувши цей визначник, отримуємо

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0.$$

Отож, якщо вектор $\vec{p}$ має головний напрямок, то справджуються рівності (6.20), в яких λ — корінь характеристичного рівняння. Цей корінь є ненульовим, бо інакше вектор $\vec{p}$ мав би асимптотичний напрямок. Навпаки, доведемо, що довільний ненульовий вектор $\vec{p}$,

координати якого задовольняють співвідношення (6.20), є головним напрямком. Зазначимо, що

$$\alpha(a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma) + \beta(a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma) +$$

$$+\gamma(a_{13}\alpha + a_{23}\beta + a_{33}\gamma) = \lambda(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = \lambda|\vec{p}| \neq 0.$$

Отже,

$$a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{33}\gamma^2 + 2a_{12}\alpha\beta + 2a_{13}\alpha\gamma + 2a_{23}\beta\gamma \neq 0,$$

тобто вектор $\vec{p}$ має неасимптотичний напрямок і рівності (6.20) свідчать про те, що вектор $\vec{p}$ є перпендикулярним до діаметральної площини, яка спряжена до цього напрямку.

Розглянемо класифікацію головних напрямків залежно від коренів характеристичного рівняння:

1) якщо $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq 0$, то поверхня має три попарно перпендикулярні головні напрямки;

2) якщо $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, $\lambda_1, \lambda_3 \neq 0$, то поверхня має один головний напрямок, який відповідає кореневі λ_3. Кожен напрямок перпендикулярний до нього також буде головним. У цьому випадку ми отримуємо поверхню обертання;

3) якщо $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \neq 0$, то кожен напрямок є головним і ми отримуємо сферу;

4) якщо $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$, то поверхня має два взаємно перпендикулярних напрямки;

5) якщо $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$, то кожен вектор, який є перпендикулярним до вектора, що відповідає кореневі λ_3, буде головним. Це також буде поверхнею обертання;

6) якщо $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, то матимемо один головний напрямок, який відповідає кореневі λ_1.

Приклад 6.15. Методом ортогональних інваріантів зведіть до канонічного вигляду рівняння поверхні

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0.$$

Розв'язання. Спочатку обчислимо $I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -36 \neq 0$. Ця поверхня належить до поверхонь I-ї групи. Обчислимо

$$I_1 = 1+5+1 = 7,$$
$$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$
$$K_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 36.$$

Позаяк $I_1 I_3 = -7 \cdot 36 < 0$, $K_4 = 36 > 0$, то це рівняння задає однопорожнинний гіперболоїд. Характеристичне рівняння $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0$ буде мати корені $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -2$. Тоді канонічне рівняння набуде вигляду

$$6X^2 + 3Y^2 - 2Z^2 + \frac{36}{-36} = 0, \quad \frac{X^2}{\frac{1}{6}} + \frac{Y^2}{\frac{1}{3}} - \frac{Z^2}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Знаходимо відповідні головні напрямки.
Для $\lambda_1 = 6$ матимемо

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{aligned} \alpha_1 - \beta_1 + \gamma_1 = 0 \\ \beta_1 - 2\gamma_1 = 0. \end{aligned} \right.$$

Нехай $\gamma_1 = 1$, тоді $\beta_1 = 2$ і $\alpha_1 = 1$. Отже, $\vec{p}_1 = (1; 2; 1)$.
Для $\lambda_2 = 3$ отримаємо

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ або } \left\{ \begin{aligned} -2\alpha_2 + \beta_2 + 3\gamma_2 = 0 \\ \beta_2 + \gamma_2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Нехай $\gamma_2 = 1$, тоді $\beta_2 = -1$ і $\alpha_2 = 1$. Отже, $\vec{p}_2 = (1; -1; 1)$.
Для $\lambda_3 = -2$ одержимо

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ або } \left\{ \begin{aligned} 3\alpha_3 + \beta_3 + 3\gamma_3 = 0 \\ \beta_3 = 0. \end{aligned} \right.$$

Нехай $\gamma_3 = -1$, тоді $\alpha_3 = 1$. Отже, $\vec{p}_3 = (1; 0; -1)$.

Пронормуємо знайдені вектори

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{p}_1}{|\vec{p}_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \ \vec{u}_2 = \frac{\vec{p}_2}{|\vec{p}_2|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$\vec{u}_3 = \frac{\vec{p}_3}{|\vec{p}_3|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Центр однопорожнинного гіперболоїда розташований у точці $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$, координати якої знайдемо як розв'язок системи рівнянь $\left\{ \begin{aligned} x + y + 3z - 1 = 0 \\ x + 5y + z + 3 = 0 \\ 3x + y + z + 1 = 0 \end{aligned} \right.$.

Формули переходу від старої системи координат до канонічної системи координат набувають вигляду

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{6}}X + \frac{1}{\sqrt{3}}Y + \frac{1}{\sqrt{2}}Z - \frac{1}{3} \\ y &= \frac{2}{\sqrt{6}}X - \frac{1}{\sqrt{3}}Y - \frac{2}{3} \\ z &= \frac{1}{\sqrt{6}}X + \frac{1}{\sqrt{3}}Y - \frac{1}{\sqrt{2}}Z + \frac{2}{3} \end{aligned} \right. .$$

Приклад 6.16. Методом ортогональних інваріантів зведіть до канонічного вигляду рівняння поверхні

$$2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + 4x - 2y = 0.$$

Розв'язання. Обчислимо інваріанти:

$$I_1 = 2+1+2 = 5,$$
$$I_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6,$$
$$I_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$
$$K_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -12,$$

$$K_4=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Позаяк $I_2>0$, $I_1K_3=-5\cdot 12<0$, то це рівняння задає еліптичний циліндр (поверхня з II-ї групи поверхонь). Характеристичне рівняння $\lambda^3-5\lambda^2+6\lambda=0$ матиме корені $\lambda_1=2, \lambda_2=3$, $\lambda_3=0$. Тоді канонічне рівняння набуде вигляду

$$2X^2+3Y^2+\frac{-12}{6}=0, \quad X^2+\frac{Y^2}{\frac{2}{3}}=1.$$

Еліптичний циліндр має пряму центрів, рівняння якої визначаємо з системи рівнянь $\begin{cases} 2x-y+2=0 \\ -x+y+z-1=0 \\ y+2z=0 \end{cases}$. Один із центрів одержимо, якщо приймемо $y=z=0$, тоді $x=-1$. Напрямний вектор прямої

$$\vec{p}=\left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\right)=(-1;-2;1),$$

тому рівняння прямої центрів

$$\frac{x+1}{-1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{1}.$$

Знайдемо головні напрямки, які відповідають кореням $\lambda_1=2$, $\lambda_2=$ $=3$.
Для $\lambda_1=2$ отримаємо

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ або } \begin{cases} \alpha_1+\beta_1-\gamma_1=0 \\ \beta_1=0. \end{cases}$$

Нехай $\gamma_1=1$, тоді $\alpha_1=1$. Отже, $\vec{p}_1=(1;0;1)$.
Для $\lambda_2=3$ матимемо

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ або } \begin{cases} \alpha_2+\beta_2=0 \\ \beta_2-\gamma_2=0. \end{cases}$$

Нехай $\gamma_2=1$, тоді $\beta_2=1$ і $\alpha_2=-1$. Отже, $\vec{p}_2=(-1;1;1)$.
Пронормуємо знайдені вектори

$$\vec{u}_1=\frac{\vec{p}_1}{|\vec{p}_1|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \vec{u}_2=\frac{\vec{p}_2}{|\vec{p}_2|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$
$$\vec{u}_3=\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Тоді формули переходу від старої системи координат до канонічної системи координат набувають вигляду

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}X-\frac{1}{\sqrt{3}}Y-\frac{1}{\sqrt{6}}Z-1 \\ y=\frac{1}{\sqrt{3}}Y-\frac{2}{\sqrt{6}}Z \\ z=\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{1}{\sqrt{3}}Y+\frac{1}{\sqrt{6}}Z \end{cases}.$$

Приклад 6.17. Методом ортогональних інваріантів визначте вигляд рівняння поверхні

$$y^2+2xy+4zx+2yz-4x-2y=0.$$

Розв'язання. Обчислимо інваріанти:

$$I_1=0+1+0=1,$$
$$I_2=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-6,$$
$$I_3=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0,$$
$$K_3=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0,$$
$$K_4=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Позаяк $I_3=K_4=0$, $I_2<0, K_3=0$, то це рівняння задає пару площин, які перетинаються (III-тя група поверхонь). Розкладемо ліву частину рівняння на лінійні множники

$$y^2+2xy+4zx+2yz-4x-2y=y^2+2y(x+z-1)+4xz-4x=$$
$$=y^2+2y(x+z-1)+(x+z-1)^2-x^2-z^2+2xz-2x+2z-1=$$
$$=(y+x+z-1)^2-(x-z)^2-2(x-z)-1=$$
$$=(y+x+z-1)^2-(x-z+1)^2=(y+2z-2)(2x+y).$$

Отже, поверхня є парою площин

$$y+2z-2=0,\ 2x+y=0,$$

які перетинаються.

Приклад 6.18. Методом ортогональних інваріантів зведіть до канонічного вигляду рівняння поверхні

$$x^2+y^2+4z^2+2xy+4zx+4yz-6z+1=0.$$

Розв'язання. Обчислимо інваріанти:

$$I_1=1+1+4=6,$$
$$I_2=\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}=0,$$
$$I_3=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&1&2\\2&2&4\end{vmatrix}=0,$$
$$K_3=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2&0\\2&4&-3\\0&-3&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2&0\\2&4&-3\\0&-3&1\end{vmatrix}=-18,$$
$$K_4=\begin{vmatrix}1&1&2&0\\1&1&2&0\\2&2&4&-3\\0&0&-3&1\end{vmatrix}=0.$$

Оскільки $I_3=0$, $K_4=0$, $I_2=0$, $K_3\neq0$, то поверхня є параболічним циліндром (IV-та група поверхонь). Канонічне рівняння набуде вигляду

$$6X^2=2\sqrt{-\frac{-18}{6}}Y,\quad X^2=\frac{\sqrt{3}}{3}Y.$$

Визначимо єдиний головний напрямок, який відповідає ненульовому кореневі $\lambda_1=6$ характеристичного рівняння $\lambda^3-6\lambda^2=0$. Отже, для $\lambda_1=6$ отримаємо

$$\begin{pmatrix}-5&1&2\\1&-5&2\\2&2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\beta_1\\\gamma_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\ \text{або}\ \begin{cases}-5\alpha_1+\beta_1-2\gamma_1=0\\ -2\beta_1+\gamma_1=0.\end{cases}$$

Нехай $\beta_1=1$, тоді $\gamma_1=2$, $\alpha_1=1$. Отже, $\vec{p}_1=(1;1;2)$.

Перепишемо рівняння поверхні у такому вигляді:

$$x^2+y^2+4z^2+2xy+4zx+4yz-6z+1=(x+y+2z)^2-6z+1=0.$$

Пряма $\begin{cases}x+y+2z=0\\-6z+1=0\end{cases}$ є прямолінійною твірною параболічного циліндра, а її напрямний вектор

$$\vec{p}_3=\left(\begin{vmatrix}1&2\\0&-6\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2&1\\-6&0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&1\\0&0\end{vmatrix}\right)=(-6;6;0)-$$

напрямним вектором канонічної осі. Вектор $\vec{p}_2$ визначаємо з умови, що трійка векторів $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{p}_3$ повинна утворювати праву ортогональну базу, тобто

$$\vec{p}_2=[\vec{p}_3,\vec{p}_1]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-6&6&0\\1&1&2\end{vmatrix}=(12;12;-12).$$

Пронормуємо знайдені вектори

$$\vec{u}_1=\frac{\vec{p}_1}{|\vec{p}_1|}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}}\right),\ \vec{u}_2=\frac{\vec{p}_2}{|\vec{p}_2|}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$\vec{u}_3=\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right).$$

Щоб записати формули переходу, нам потрібно вибрати точку, яка буде новим початком системи координат. Для цього знайдемо головну діаметральну площину. Ця діаметральна площина перпендикулярна до свого спряженого напрямку, тому її рівняння

$$(x+y+2z)+(x+y+2z)+(2x+2y+4z-3)2=0,$$

$$x + y + 2z - 1 = 0.$$

Виберемо довільну точку циліндра $(x+y+2z)^2 - 6z + 1 = 0$, яка належить цій діаметральній площині $x+y+2z-1 = 0$. Легко бачити, що $z = \frac{1}{3}$, нехай $x = 0$, тоді $y = -\frac{1}{3}$. Оберемо точку $\left(0; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ початком канонічної системи координат, тому формули переходу від старої системи координат до канонічної системи координат набудуть вигляду

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{6}}X + \frac{1}{\sqrt{3}}Y - \frac{1}{\sqrt{2}}Z \\ y = \frac{1}{\sqrt{6}}X + \frac{1}{\sqrt{3}}Y + \frac{1}{\sqrt{2}}Z - \frac{1}{3} \\ z = \frac{2}{\sqrt{6}}X - \frac{1}{\sqrt{3}}Y + \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Приклад 6.19. Методом ортогональних інваріантів визначте вигляд рівняння поверхні

$$4x^2 + 9y^2 + z^2 - 12xy + 4xz - 6yz + 4x - 6y + 2z - 5 = 0.$$

Розв'язання. Обчислимо інваріанти:

$I_1 = 4 + 9 + 1 = 14,$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$K_2 = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -6 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -84,$$

$$K_3 = \begin{vmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$K_4 = \begin{vmatrix} 4 & -6 & 2 & 2 \\ -6 & 9 & -3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

Позаяк $I_3 = K_4 = I_2 = K_3 = 0$, $I_1 \neq 0, K_2 < 0$, то це рівняння задає пару дійсних паралельних площин (V-та група поверхонь).

Розкладемо ліву частину рівняння на лінійні множники

$$4x^2 + 9y^2 + z^2 - 12xy + 4xz - 6yz + 4x - 6y + 2z - 5 =$$
$$= (2x - 3y + z)^2 + 2(2x - 3y + z) + 1 - 6 =$$
$$= (2x - 3y + z + 1)^2 - 6 =$$
$$= (2x - 3y + z + 1 + \sqrt{6})(2x - 3y + z + 1 - \sqrt{6}) = 0.$$

Отже, поверхня є парою паралельних площин

$$2x - 3y + z + 1 + \sqrt{6} = 0, \ 2x - 3y + z + 1 - \sqrt{6} = 0.$$

Вправи

6.10.1. За допомогою ортогональних інваріантів визначте тип поверхні:

а) $x^2 + 2yz - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$;
б) $y^2 + 2z^2 + 2xy + 4xz - 2x - 4z + 1 = 0$;
в) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6xy - 4z + 1 = 0$;
г) $x^2 + y^2 - 2z^2 - 2xz + 4yz + 4y + 2 = 0$;
ґ) $x^2 + 4y^2 + z^2 + 8xy - 2xz - 8yz - 12 = 0$;
д) $y^2 + xy - xz - yz - 2x - y - z - 2 = 0$;
е) $x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy + 2xz + 2y - 4z + 1 = 0$;
є) $9x^2 + y^2 + z^2 + 6xy - 6xz - 2yz + 12x + 4y - 4z + 4 = 0$;
ж) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz - 4x - 2y - 8z + 13 = 0$.

6.10.2. Зведіть рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду методом ортогональних інваріантів. Запишіть канонічну систему координат для цієї поверхні:

а) $2x^2 + 2y^2 - 7z^2 - 8xy + 10xz + 10yz - 12x + 12y = 0$;
б) $2x^2 + 10y^2 - 2z^2 + 12xy + 8yz + 12x + 4y + 8z - 1 = 0$;
в) $-4x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 7xy - 2xz - 5yz - 5x + y + z - 1 = 0$;
г) $x^2 + z^2 - 2xz - 6x - 16y + 6z + 25 = 0$;
ґ) $4x^2 + 9y^2 + z^2 - 12xy + 4xz - 6yz - 8x + 12y - 4z + 5 = 0$.

6.10.3. Зведіть рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду методом ортогональних інваріантів. Запишіть канонічну систему координат для цієї поверхні:

а) $3x^2 + 3y^2 - 4z^2 - 18xy - 48x + 24y - 8z + 20 = 0$;
б) $5x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 10xy - 4xz - 4yz + 36x - 12y + 24z + 84 = 0$;

в) $3x^2 + 6xy - 6xz - 2x + 8y - 8z + 4 = 0$;
г) $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 4xz + 2yz + 8y - 24 = 0$;
ґ) $x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 6xy + 8xz - 24yz + 4x - 12y + 16z - 12 = 0$.

Відповіді до розділу 6

6.1.1. а) $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 36$; б) $x^2 + y^2 + z^2 = 49$; в) $(x-1)^2+(y-4)^2+(z+7)^2 = 121$; г) $(x-6)^2+(y+8)^2+(z-3)^2 = 100$. **6.1.2.** $(x-1)^2+(y-2,5)^2+(z-1,5)^2 = 9,5$. **6.1.3.** а) $(3;-4;-1)$, $R = 4$; б) $(-1;2;0)$, $R = 3$; в) сфера уявна $R = \sqrt{-1}$; г) $(2;-6;1)$, $R = 0$; ґ) $(\frac{1}{2};-\frac{1}{3};1)$, $R = 2$; **6.1.4.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2 = 49$. **6.1.5.** $(x+2)^2+(y-4)^2+(z-5)^2 = 81$. **6.1.6.** а) Вісім сфер $x^2 + y^2 + z^2 \pm 2Rx \pm 2Ry \pm 2Rz + 2R^2 = 0$; б) вісім сфер $x^2+y^2+z^2 \pm \sqrt{2}Rx \pm \sqrt{2}Ry \pm \sqrt{2}Rz + \frac{R^2}{2} = 0$. **6.1.7.** а) Ззовні сфери; б) на поверхні сфери; в) всередині сфери. **6.1.8.** а) 5; б) 21; в) 7. **6.1.9.** а) Пряма перетинає сферу; б) пряма проходить поза сферою; в) пряма дотикається до сфери. **6.1.10.** $8x + 4y + z - 100 = 0$, $2x - 2y + z - 28 = 0$. **6.1.11.** $x^2 + y^2 + z^2 + 22x + 16y - 6z = 0$. **6.1.12.** $x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 12$, $x^2+y^2 + (z+4)^2 = 27$.

6.2.1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$. **6.2.2.** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$. **6.2.3.** $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{25} + \frac{(z-2)^2}{4} = 1$. **6.2.4.** $x^2 + y^2 = 9$. **6.2.5.** $y^2 + z^2 = 16$. **6.2.6.** $(x+1)^2 + y^2 = 4$. **6.2.7.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$. **6.2.8.** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$. **6.2.9.** $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. **6.2.10.** $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. **6.2.11.** $-\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} + \frac{z^2}{144} = -1$. **6.2.12.** $y^2 + z^2 - 4x = 0$. **6.2.13.** $y^2 + z^2 - 2px = 0$. **6.2.14.** $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. **6.2.15.** $x^2 + y^2 = b^2$. **6.2.16.** а) $4x^2 + 4y^2 = z^2$; б) $x^2 + z^2 = 4y^2$; в) площина Oyz.

6.3.1. $x^2+9y^2+10z^2+6xy-6x-18y-40z-71 = 0$. **6.3.2.** $4x^2+5y^2+z^2+4xz-4x+20y-2z-14 = 0$. **6.3.3.** $x^2+3y^2+z^2+2xy-2xz-2yz-x+z = 0$. **6.3.4.** $5x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy - 8xz - 18x + 10y + 8z + 25 = 0$. **6.3.5.** $x^2+4y^2+5z^2-2xz-8yz+8y-8z = 0$. **6.3.6.** $8x^2+5y^2+5z^2-4xy+4xz+8yz-28x+16y+2z-4 = 0$. **6.3.7.** $x^2+y^2+2z^2-2xz-2yz-1 = 0$. **6.3.8.** $x^2-y^2-2xz+2yz+x+y-2z = 0$. **6.3.9.** $16x^2+16y^2+13z^2-16xz+24yz+16x-24y-26z-131 = 0$. **6.3.10.** $x^2+13y^2+z^2-6xy+4yz-6x+26y+4z+9 = 0$. **6.3.11.** $16x^2+y^2+z^2-8xy+4xz-28x+8y-6z+9 = 0$. **6.3.12.** $16x^2+16y^2+z^2-8xz-24yz+40x-72y+62z+97 = 0$. **6.3.13.** $4x^2-9y^2+9z^2+6xz+10x-6z+13 = 0$. **6.3.14.** $4x^2-2y^2-z^2+2yz+2z-2 = 0$. **6.3.15.** $-3y^2+xy+xz-2yz-3x+15y+5z-19 = 0$. **6.3.16.** $-7z^2+4xy+4xz-2yz-4x+4y+6z-4 = 0$. **6.3.17.** $5x^2-11y^2-z^2-12xy+8xz+24yz-38x-30y+62z+5 = 0$. **6.3.18.** $x^2+7y^2+z^2+8xy+16xz-8yz-12x+96y-6z+189 = 0$. **6.3.19.** $825x^2+111y^2+9z^2+680xy-340xz-136yz-8980x-35224y+1886z+24136 = 0$. **6.3.20.**

$32x^2+143y^2+143z^2-148xy-148xz-74yz+1200x+1140y-1020z-2520 = 0$. **6.3.21.** $z^2 = \pm 2xy$. **6.3.22.** $x^2 = \pm 2yz$.

6.4.1. а) Сфера $(x-6)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$ з центром у точці $C(6;-2;3)$ і радіусом $R = 5$; б) однопорожнинний гіперболоїд $\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{y^2}{9} + \frac{(z+1)^2}{3} = 1$ з центром у точці $(3;0;-1)$, півосями $a = 3$, $b = 3$, $c = \sqrt{3}$ та розташований вздовж осі Oy; в) пара площин $\left\{\begin{array}{l} x - z + 2 = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{array}\right.$, які перетинаються по дійсній прямій; г) уявний конус $x^2 + 2y^2 + 3(z-1)^2 = 0$; ґ) двопорожнинний гіперболоїд $xy + 3(z-3)^2 = -27$; д) гіперболічний циліндр $(x-6)z = -3$, вісь якого паралельна до осі Oy; е) гіперболічний параболоїд $\frac{Y^2}{2} - \frac{Z^2}{2} = -4X$, де $\left\{\begin{array}{l} X = x + 44 \\ Y = \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} \\ Z = -\frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}} - 9\sqrt{2} \end{array}\right.$; є) гіперболічний циліндр $-(x+2z)^2+8(z+\frac{\sqrt{3}}{8})^2 = \frac{27}{8}$. **6.4.2.** а) Дві дійсні площини, які перетинаються; б) конус; в) пара площин, які збігаються; г) однопорожнинний гіперболоїд; ґ) пара уявних площин, які перетинаються по дійсній прямій; д) пара паралельних площин; е) конус; є) еліптичний параболоїд.

6.5.1. а) $(1;0;-2)$; б) $\left(-\frac{63}{61};\frac{74}{61};\frac{7}{61}\right)$; в) $\left(-1;\frac{3}{2};0\right)$; г) лінія центрів $\frac{x+6}{3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z}{1}$; ґ) нема центра; д) $\left(\frac{14}{3};3;\frac{1}{3}\right)$; е) площина центрів $2x-y+3z+2 = 0$; є) нема центра; ж) $\left(-\frac{2}{7};\frac{13}{7};-\frac{13}{7}\right)$; з) нема центра; и) $\left(-\frac{10}{3};\frac{1}{3};1\right)$. **6.5.2.** а) $x'^2 + 2y'^2 + 2z'^2 + 2x'y' - 4 = 0$, $\left\{\begin{array}{l} x' = x \\ y' = y - 1 \\ z' = z - 1 \end{array}\right.$; б) $y'^2 + 3x'y' + x'z' + 2y'z' + \frac{4}{5} = 0$, $\left\{\begin{array}{l} x' = x - \frac{4}{5} \\ y' = y + \frac{2}{5} \\ z' = z + \frac{9}{5} \end{array}\right.$; в) $x'^2 + 2y'^2 - z'^2 - 1 = 0$, $\left\{\begin{array}{l} x' = x + 1 \\ y' = y - 1 \\ z' = z - 1 \end{array}\right.$.

6.6.1. а) $a_{14}^2 - a_{11}a_{44} = 0$; б) $a_{11} = 0$; в) $a_{11} = a_{14} = 0$; г) $a_{11} = a_{14} = a_{44} = 0$; ґ) $a_{14}^2 - a_{11}a_{44} < 0$. **6.6.2.** а) $(1;2;3)$, $(2;-1;-4)$; б) пряма повністю належить поверхні; в) пряма є дотичною до поверхні в точці $(-3;0;0)$. **6.6.3.** $\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \end{array}\right.$. **6.6.4.** $\frac{x-6}{3} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-8}{4}$, $\frac{x-6}{9} = \frac{y-2}{8} = \frac{z-8}{20}$. **6.6.5.** $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$, $\frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$. **6.6.6.** $2x + 3y - z + 32 = 0$, $\frac{x-4}{1} = \frac{y+24}{2} = \frac{z+32}{8}$, $\frac{x-4}{-1} = \frac{y+24}{2} = \frac{z+32}{4}$. **6.6.7.** $(1;1;1)$, $(-1;-1;-1)$, $\frac{\pi}{3}$. **6.6.8.** $(-1;-1;0)$, $\frac{\pi}{2}$. **6.6.9.** $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{0}$, $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. **6.6.10.** $\frac{x+1}{\sqrt{5}} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-\sqrt{5}}$, $\frac{x+1}{-\sqrt{5}} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{\sqrt{5}}$. **6.6.11.** $\frac{x-12u-\sqrt{12}}{2} = \frac{y-u}{1} = \frac{z+u}{-1}$, $\frac{x-12u+\sqrt{12}}{2} = \frac{y-u}{1} = \frac{z+u}{-1}$. **6.6.12.** При $a \neq b$, гіпербола, яку одержали при перерізі параболоїда площиною $z = \frac{b^2-a^2}{2}$; при $a = b$ — $\begin{cases} \frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

6.7.1. $2x-y+3z=0$; **6.7.2.** $x+y+z+1=0$; **6.7.3.** $x+2y-2=0$; **6.7.4.** $2x+y-z-3=0$; **6.7.5.** $x+2y-3z+20,4=0$; **6.7.6.** $2x+y-z+18=0$; **6.7.7.** $y+1=0$; **6.7.8.** $27x-33y+37z+44=0$; **6.7.9.** $\cos\varphi = \frac{23}{\sqrt{777}}$; **6.7.10.** $7x-28y-14z-8=0$; **6.7.11.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{0}$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$, $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$; **6.7.12.** $x-y=0$, $x+y-z=0$, $3x+3y+6z-2=0$; **6.7.13.** $2x+y+4z=0$.

6.8.1. $8x-5y+2z+4=0$. **6.8.2.** $5x+6y+7z-4=0$. **6.8.3.** $x+2y=0$, $x+2y-2=0$. **6.8.4.** $4y-z+6=0$. $y-z+3=0$. **6.8.5.** $2x-z=0$. **6.8.6.** $z=2$, $x+2y=8$. **6.8.7.** $2x-y-2z-8=0$, $14x-3y-6z-144=0$.

6.9.1. а) Гіперболічний циліндр $X^2-Y^2=5$,

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt2}x + \frac{1}{\sqrt2}y + \frac{3}{2\sqrt2} \\ Y = -\frac{1}{\sqrt2}x + \frac{1}{\sqrt2}y + \frac{3}{2\sqrt2} \\ Z = z \end{cases};$$

б) гіперболічний параболоїд $2Y^2-2Z^2=5X$,

$$\begin{cases} X = x + \frac15 \\ Y = \frac{1}{\sqrt2}y + \frac{1}{\sqrt2}z + \frac{1}{2\sqrt2} \\ Z = -\frac{1}{\sqrt2}y + \frac{1}{\sqrt2}z + \frac{1}{2\sqrt2} \end{cases};$$

в) однопорожнинний гіперболоїд $X^2-Y^2+Z^2=11$,

$$\begin{cases} X = x+1 \\ Y = \frac{1}{\sqrt2}y + \frac{1}{\sqrt2}z \\ Z = -\frac{1}{\sqrt2}y + \frac{1}{\sqrt2}z \end{cases};$$

г) однопорожнинний гіперболоїд $-X^2+Y^2+Z^2=15$,

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt2}x + \frac{1}{\sqrt2}z \\ Y = y-4 \\ Z = -\frac{1}{\sqrt2}x + \frac{1}{\sqrt2}z \end{cases};$$

ґ) гіперболічний параболоїд $4X^2-4Y^2=Z$,

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt2}x + \frac{1}{\sqrt2}y \\ Y = -\frac{1}{\sqrt2}x + \frac{1}{\sqrt2}y - \frac{4}{\sqrt2} \\ Z = z-33 \end{cases};$$

д) гіперболічний параболоїд $-Y^2+Z^2=6X$,

$$\begin{cases} X = x + \frac{17}{6} \\ Y = \frac{1}{\sqrt2}y + \frac{1}{\sqrt2}z - \frac{5}{\sqrt2} \\ Z = -\frac{1}{\sqrt2}y + \frac{1}{\sqrt2}z - \frac{7}{\sqrt2} \end{cases};$$

е) гіперболічний параболоїд $-X^2+Y^2=Z$,

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt2}x + \frac{1}{\sqrt2}y + \frac{3}{\sqrt2} \\ Y = -\frac{1}{\sqrt2}x + \frac{1}{\sqrt2}y - \frac{3}{\sqrt2} \\ Z = z-5 \end{cases};$$

є) гіперболічний параболоїд $-X^2+Y^2=4Z$,

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt2}x + \frac{1}{\sqrt2}y + \frac{12}{\sqrt2} \\ Y = -\frac{1}{\sqrt2}x + \frac{1}{\sqrt2}y - \frac{12}{\sqrt2} \\ Z = z-5 \end{cases}.$$

6.9.2. а) Еліптичний циліндр $\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{1} = 1$,
$\vec{e}_1' = \left(\frac{1}{\sqrt3}; \frac{1}{\sqrt3}; -\frac{1}{\sqrt3}\right)$, $\vec{e}_2' = \left(\frac{1}{\sqrt6}; -\frac{2}{\sqrt6}; -\frac{1}{\sqrt6}\right)$, $\vec{e}_3' = \left(\frac{1}{\sqrt2}; 0; \frac{1}{\sqrt2}\right)$;
б) параболічний циліндр $Y^2 = \frac43 X$,
$\vec{e}_1' = \left(\frac23; \frac23; \frac13\right)$, $\vec{e}_2' = \left(\frac23; -\frac13; -\frac23\right)$, $\vec{e}_3' = \left(\frac13; -\frac23; \frac23\right)$;
в) пара площин, які збігаються $6Z^2=0$, $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=6$,
$\vec{e}_1' = \left(-\frac{1}{\sqrt2}; 0; \frac{1}{\sqrt2}\right)$, $\vec{e}_2' = \left(\frac{1}{\sqrt3}; \frac{1}{\sqrt3}; \frac{1}{\sqrt3}\right)$, $\vec{e}_3' = \left(\frac{1}{\sqrt6}; -\frac{2}{\sqrt6}; \frac{1}{\sqrt6}\right)$;
г) однопорожнинний гіперболоїд $3X^2+6Y^2-2Z^2=1$, центр $\left(-\frac13; -\frac23; \frac23\right)$,
$\vec{e}_1' = \left(\frac{1}{\sqrt3}; -\frac{1}{\sqrt3}; \frac{1}{\sqrt3}\right)$, $\vec{e}_2' = \left(\frac{1}{\sqrt6}; \frac{2}{\sqrt6}; \frac{1}{\sqrt6}\right)$, $\vec{e}_3' = \left(\frac{1}{\sqrt2}; 0; -\frac{1}{\sqrt2}\right)$;
ґ) еліптичний параболоїд $\frac{X^2}{1} + \frac{3Y^2}{2} = 2Z$, вершина $(2;2;1)$,
$\vec{e}_1' = \left(\frac{1}{\sqrt2}; -\frac{1}{\sqrt2}; 0\right)$, $\vec{e}_2' = \left(\frac{1}{3\sqrt2}; \frac{1}{3\sqrt2}; -\frac{4}{3\sqrt2}\right)$), $\vec{e}_3' = \left(\frac23; \frac23; \frac13\right)$;
д) пара паралельних площин $Z^2 = \frac37$, площина центрів
$4y - 15z + \frac{3}{14} = 0$, $\vec{e}_1' = \left(\frac{1}{\sqrt5}; 0; -\frac{2}{\sqrt5}\right)$, $\vec{e}_2' = \left(\frac{6}{\sqrt{70}}; \frac{5}{\sqrt{70}}; \frac{3}{\sqrt{70}}\right)$,
$\vec{e}_3' = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}; -\frac{3}{\sqrt{14}}; \frac{1}{\sqrt{14}}\right)$;
е) конус $X^2+Y^2-2Z^2=0$, $\lambda_1=\lambda_2=-3$, $\lambda_3=6$, центр $(1;1;-1)$,
$\vec{e}_1' = \left(\frac{1}{\sqrt5}; -\frac{2}{\sqrt5}; 0\right)$, $\vec{e}_2' = \left(\frac{4}{3\sqrt5}; \frac{2}{3\sqrt5}; \frac{5}{3\sqrt5}\right)$, $\vec{e}_3' = \left(\frac23; \frac13; -\frac23\right)$;
є) еліптичний циліндр $\frac{X^2}{2} + \frac{3Y^2}{4} = 1$,
$\vec{e}_1' = \left(\frac{1}{\sqrt2}; 0; \frac{1}{\sqrt2}\right)$, $\vec{e}_2' = \left(\frac{1}{\sqrt3}; \frac{1}{\sqrt3}; \frac{1}{\sqrt3}\right)$, $\vec{e}_3' = \left(\frac{1}{\sqrt6}; \frac{2}{\sqrt6}; -\frac{1}{\sqrt6}\right)$;
ж) однопорожнинний гіперболоїд $3X^2+6Y^2-2Z^2=1$, центр $\left(-\frac13; -\frac23; \frac23\right)$,
$\vec{e}_1' = \left(\frac{1}{\sqrt3}; -\frac{1}{\sqrt3}; \frac{1}{\sqrt3}\right)$, $\vec{e}_2' = \left(\frac{1}{\sqrt6}; \frac{2}{\sqrt6}; \frac{1}{\sqrt6}\right)$, $\vec{e}_3' = \left(\frac{1}{\sqrt2}; 0; -\frac{1}{\sqrt2}\right)$;
з) еліпсоїд $\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{1} + \frac{3Z^2}{2} = 1$, центр $(1;2;-1)$,
$\vec{e}_1' = \left(\frac13; \frac23; \frac23\right)$, $\vec{e}_2' = \left(\frac23; \frac13; -\frac23\right)$, $\vec{e}_3' = \left(\frac23; -\frac23; \frac13\right)$;
и) двопорожнинний гіперболоїд $\frac{5X^2}{4} + \frac{15Y^2}{4} - \frac{25Z^2}{4} = -1$, центр $\left(0; 1; -\frac25\right)$,
$\vec{e}_1' = \left(\frac{1}{\sqrt2}; -\frac{1}{\sqrt2}; 0\right)$, $\vec{e}_2' = \left(\frac{1}{\sqrt2}; \frac{1}{\sqrt2}; 0\right)$, $\vec{e}_3' = (0;0;1)$.

6.10.1. а) Конус; б) однопорожнинний гіперболоїд; в) уявний еліпсоїд; г) двопорожнинний гіперболоїд; д) гіперболічний циліндр; е) дві дійсні площини, які перетинаються; є) дві уявні площини, які перетинаються; ж) дві площини, які збігаються; з) параболічний циліндр.

6.10.2. а) Однопорожнинний гіперболоїд $\dfrac{X^2}{4}+\dfrac{Y^2}{2}-Z^2=1$,

$$\begin{cases} X=\frac{1}{\sqrt3}x+\frac{1}{\sqrt3}y+\frac{1}{\sqrt3}z\\ Y=\frac{1}{\sqrt2}x-\frac{1}{\sqrt2}y-\sqrt2\\ Z=\frac{1}{\sqrt6}x+\frac{1}{\sqrt6}y-\frac{2}{\sqrt6}z \end{cases};$$

б) гіперболічний параболоїд $\dfrac{X^2}{\frac{1}{14}}-\dfrac{Y^2}{\frac14}=\frac{8\sqrt{14}}{7}Z$,

$$\begin{cases} X=\frac{2}{\sqrt{21}}x+\frac{4}{\sqrt{21}}y+\frac{1}{\sqrt{21}}z+\frac{12}{7\sqrt{21}}\\ Y=\frac{1}{\sqrt6}x-\frac{1}{\sqrt6}y+\frac{2}{\sqrt6}z+\frac{3}{\sqrt6}\\ Z=-\frac{3}{\sqrt{14}}x+\frac{1}{\sqrt{14}}y+\frac{2}{\sqrt{14}}z-\frac{341}{56\sqrt{14}} \end{cases};$$

в) дві площини, які перетинаються $4x+y-2z+1=0$, $x-2y+z+1=0$;

г) параболічний циліндр $X^2=8Y$, $\begin{cases} X=\frac{1}{\sqrt2}x-\frac{1}{\sqrt2}z-\frac{3}{\sqrt2}\\ Y=y-1\\ Z=\frac{1}{\sqrt2}x+\frac{1}{\sqrt2}z-\frac{1}{\sqrt2} \end{cases}$;

ґ) дві уявні паралельні площини $(2x-3y+z-2)^2+1=0$.

6.10.3. а) Двопорожнинний гіперболоїд $\dfrac{X^2}{\frac92}+\dfrac{Y^2}{3}-\dfrac{Z^2}{\frac32}=-1$,

$$\begin{cases} X=z+1\\ Y=\frac{1}{\sqrt2}x+\frac{1}{\sqrt2}y+\sqrt2\\ Z=\frac{1}{\sqrt2}x-\frac{1}{\sqrt2}y-\frac{3}{\sqrt2} \end{cases};$$

б) еліптичний параболоїд $\dfrac{X^2}{2}+Y^2=2\sqrt2Z$,

$$\begin{cases} X=\frac{1}{\sqrt6}x+\frac{1}{\sqrt6}y+\frac{2}{\sqrt6}z+\sqrt6\\ Y=\frac{1}{\sqrt3}x+\frac{1}{\sqrt3}y-\frac{1}{\sqrt3}z\\ Z=-\frac{1}{\sqrt2}x+\frac{1}{\sqrt2}y-\sqrt2 \end{cases};$$

в) гіперболічний циліндр

$$\frac{X^2}{4}-\frac{Y^2}{2}=1,\ \begin{cases} X=\frac{1}{\sqrt3}x-\frac{1}{\sqrt3}y+\frac{1}{\sqrt3}z+\sqrt3\\ Y=-\frac{2}{\sqrt6}x-\frac{1}{\sqrt6}y+\frac{1}{\sqrt6}z-\frac{1}{\sqrt6}\\ Z=\frac{1}{\sqrt2}y+\frac{1}{\sqrt2}z \end{cases};$$

г) параболічний циліндр $X^2=\frac{2\sqrt{30}}{9}Y$,

$$\begin{cases} X=-\frac{2}{\sqrt6}x+\frac{1}{\sqrt6}y+\frac{1}{\sqrt6}z\\ Y=-\frac{2}{\sqrt{30}}x-\frac{5}{\sqrt{30}}y+\frac{1}{\sqrt{30}}z+\frac{53}{18}\\ Z=\frac{1}{\sqrt5}x+\frac{2}{\sqrt5}z+\frac{65}{18} \end{cases};$$

ґ) дві дійсні паралельні площини $x-3y+4z+6=0$, $x-3y+4z-2=0$.

Розділ 7
Лінійні й афінні перетворення

7.1. Теоретичні відомості про лінійні й афінні перетворення простору

Означення 7.1.1. *Перетворенням* множини X на себе називається довільне бієктивне відображення $f\colon X\to X$.

Множину всіх перетворень множини X на себе позначимо через $\mathcal{P}r(X)$. Перетворення скінченної множини називається *підстановками* або *перестановками*.

Якщо f і g перетворення множини X, то їхня композиція $g\circ f$ теж є перетворенням множини X. Перетворенням також буде й обернене відображення f^{-1} до перетворення f. Отже, множина $\mathcal{P}r(X)$ утворює групу стосовно операції композиції відображень.

Нехай G підгрупа групи $\mathcal{P}r(X)$. Скажемо, що множини $Y_1, Y_2\subset X$ є *G-еквівалентними*, якщо існує таке перетворення $g\in G$, що $g(Y_1)=Y_2$.

Теорема 7.1.2. *Відношення G-еквівалентності є відношенням еквівалентності на множині всіх підмножин множини X.*

Отже, множина всіх підмножин множини X розпадається на класи G-еквівалентних між собою підмножин. Чим більша група G, тим більші класи G-еквівалентності, тим більше "подібних" між собою фігур.

У геометрії розглядають різні групи перетворень. В школі ми досліджували властивості фігур, які не змінюються під час рухів (*ізометричних* перетворень), перетворень подібності. В аналітичній геометрії поряд з ізометричними перетвореннями розглядаються афінні та проективні перетворення.

Означення 7.1.3. *Лінійним* відображенням f множини всіх точок простору називається відображення множини всіх точок цього простору в себе, за якого зберігається поділ відрізка у заданому відношенні, тобто, якщо $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$, то $\overrightarrow{f(A)f(M)} = \lambda\overrightarrow{f(M)f(B)}$.

Означення 7.1.4. Відображення φ векторного простору V у векторний простір L називається *лінійним*, якщо для довільних векторів $\vec{a}, \vec{b} \in V$ і довільного числа λ виконуються умови:
1) $\varphi(\vec{a}+\vec{b}) = \varphi(\vec{a}) + \varphi(\vec{b})$;
2) $\varphi(\lambda\vec{a}) = \lambda\varphi(\vec{a})$.

Задача 7.1. Доведіть, що при лінійному відображенні точок простору рівні напрямлені відрізки переходять у рівні напрямлені відрізки.

Розв'язання. Нехай f — лінійне відображення і $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Треба довести, що
$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(C)f(D)}.$$

З рівності $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ випливає, що середина відрізка AD збігається з серединою відрізка BC. З означення лінійного відображення образи середин відрізків AD і BC є серединами відрізків $f(A)f(D)$ і $f(B)f(C)$, а позаяк середини відрізків AD і BC збігаються, то і середини відрізків $f(A)f(D)$ і $f(B)f(C)$ збігаються, а отже, $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(C)f(D)}$.

Задача 7.2. Доведіть таке: якщо f лінійне відображення точок простору, то $\hat{f}$ є лінійним відображенням векторів простору.

Розв'язання. Нехай $\vec{a}, \vec{b}$ довільні вектори, а λ довільне число. Зафіксуємо напрямлені відрізки $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$, які є представниками векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, відповідно. Тоді
$$\begin{aligned}
&\vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}\\
&\hat{f}(\vec{a}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}\\
&\hat{f}(\vec{b}) = \overrightarrow{f(B)f(C)}\\
&f(\vec{a}+\vec{b}) = \overrightarrow{f(A)f(C)}.
\end{aligned}$$

Але
$$\overrightarrow{f(A)f(B)} + \overrightarrow{f(B)f(C)} = \overrightarrow{f(A)f(C)}.$$

Отже, $\hat{f}(\vec{a}) + \hat{f}(\vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$.

Тепер зафіксуємо напрямлені відрізки $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, які є представниками векторів $\vec{a}$ і $\lambda\vec{a}$, відповідно.

Тоді $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$. З означення лінійного відображення множини точок простору одержуємо
$$f(\lambda\vec{a}) = \hat{f}(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{f(A)f(C)} = \lambda\overrightarrow{f(A)f(B)} = \lambda f(\vec{a}).$$

Нехай $O_{\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3}$ деяка афінна система координат, f лінійне перетворення точок простору. Нехай $O' = f(O)$, $\vec{e}_1^{\,'} = \hat{f}(\vec{e}_1)$, $\vec{e}_2^{\,'} = \hat{f}(\vec{e}_2)$, $\vec{e}_3^{\,'} = \hat{f}(\vec{e}_3)$ та $M(x;y;z)$ довільна точка простору і $M' = f(M)$ — образ цієї точки при відображенні. Тоді $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$, тому $\overrightarrow{f(O)f(M)} = x\hat{f}(\vec{e}_1) + y\hat{f}(\vec{e}_2) + z\hat{f}(\vec{e}_3)$. Розкладемо вектори $\hat{f}(\vec{e}_1)$, $\hat{f}(\vec{e}_2)$, $\hat{f}(\vec{e}_3)$ за векторами бази $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$
$$\begin{aligned}
\hat{f}(\vec{e}_1) &= c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 + c_{31}\vec{e}_3\\
\hat{f}(\vec{e}_2) &= c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 + c_{32}\vec{e}_3\\
\hat{f}(\vec{e}_3) &= c_{13}\vec{e}_1 + c_{23}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3
\end{aligned}$$
$$\overrightarrow{Of(O)} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3.$$

Тоді
$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{Of(M)} = \overrightarrow{Of(O)} + \overrightarrow{f(O)f(M)} = x(c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 + c_{31}\vec{e}_3) + y(c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 + c_{32}\vec{e}_3) + z(c_{13}\vec{e}_1 + c_{23}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3) + a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$.

Звідси знаходимо аналітичний запис лінійного перетворення
$$\begin{cases} x' = c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z + a_1\\ y' = c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z + a_2\\ z' = c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z + a_3 \end{cases}.$$

Матриця $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ називається *матрицею лінійного перетворення* f.

Задача 7.3. Доведіть, що при лінійному відображенні точок простору цей простір відображається на простір або на площину, або на пряму.

Розв'язання. Зафіксуємо систему координат $O_{\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3}$. Нехай довільна точка простору M має координати $(x; y; z)$. Оскільки

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3, \text{ то}$$

$$\hat{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)f(M)} = x\hat{f}(\vec{e}_1) + y\hat{f}(\vec{e}_2) + z\hat{f}(\vec{e}_3).$$

Можливі чотири випадки.

1. Вектори $\hat{f}(\vec{e}_1), \hat{f}(\vec{e}_2), \hat{f}(\vec{e}_3)$ лінійно незалежні.

Нехай N — довільна точка простору. Позаяк $\hat{f}(\vec{e}_1), \hat{f}(\vec{e}_2), \hat{f}(\vec{e}_3)$ — база, то існують x, y, z такі, що

$$\overrightarrow{f(O)N} = x\hat{f}(\vec{e}_1) + y\hat{f}(\vec{e}_2) + z\hat{f}(\vec{e}_3).$$

Очевидно, точка N є образом точки M з координатами $(x; y; z)$ у системі координат $O_{\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3}$.

2. Система векторів $\hat{f}(\vec{e}_1), \hat{f}(\vec{e}_2), \hat{f}(\vec{e}_3)$ лінійно залежна і серед цих векторів є два неколінеарні. Нехай $\hat{f}(\vec{e}_1)$ і $\hat{f}(\vec{e}_2)$ неколінеарні. Тоді існують такі λ і μ, що

$$\hat{f}(\vec{e}_3) = \lambda\hat{f}(\vec{e}_1) + \mu\hat{f}(\vec{e}_2).$$

Нехай $M(x; y; z)$ довільна точка простору. Тоді

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

і

$$\hat{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)f(M)} = x\hat{f}(\vec{e}_1) + y\hat{f}(\vec{e}_2) + \lambda z\hat{f}(\vec{e}_1) + \mu z\hat{f}(\vec{e}_2) =$$

$$= (x + \lambda z)\hat{f}(\vec{e}_1) + (y + \mu z)\hat{f}(\vec{e}_2).$$

Отже, образом простору є площина, яка визначається точкою $f(0)$ і векторами $\hat{f}(\vec{e}_1)$, $\hat{f}(\vec{e}_2)$.

3. $\hat{f}(\vec{e}_1)\|\hat{f}(\vec{e}_2)\|\hat{f}(\vec{e}_3)$ і серед векторів $\hat{f}(\vec{e}_1), \hat{f}(\vec{e}_2), \hat{f}(\vec{e}_3)$ є ненульовий. Нехай $\hat{f}(\vec{e}_1) \neq \vec{0}$. Тоді образом простору є пряма, яка задається точкою $f(0)$ і вектором $\hat{f}(\vec{e}_1)$.

4. $\hat{f}(\vec{e}_1) = \hat{f}(\vec{e}_2) = \hat{f}(\vec{e}_3) = \vec{0}$. Тоді образом простору є точка $f(0)$.

Означення 7.1.5. *Афінним перетворенням* простору називається взаємно однозначне (бієктивне) лінійне відображення простору на себе.

Якщо лінійне відображення простору задане в координатах

$$\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z + a_1 \\ y' &= c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z + a_2 \\ z' &= c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z + a_3, \end{aligned}$$

то воно є бієктивним, а отже, афінним тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Зауваження. Всі наведені випадки легко переносяться на випадок площини та прямої, які є підпросторами тривимірного простору.

Приклад 7.1. Афінне перетворення φ переводить точки $A(2; 1)$, $B(3; 0)$, $C(1; 4)$ відповідно в точки $A'(1; 6)$, $B'(1; 9)$, $C'(3; 1)$. Куди перейде за допомогою цього перетворення точка $M(5; 7)$? Яка точка залишиться нерухомою?

Розв'язання. Нехай шукане перетворення задається формулами

$$\begin{cases} \tilde{x} = a_{11}x + a_{12}y + a \\ \tilde{y} = a_{21}x + a_{22}y + b. \end{cases}$$

Розглянемо відповідне лінійне перетворення простору

$$\begin{cases} \tilde{\alpha} = a_{11}\alpha + a_{12}\beta \\ \tilde{\beta} = a_{21}\alpha + a_{22}\beta. \end{cases} \tag{7.1}$$

Це перетворення переводить вектори $\overrightarrow{AB} = (1; -1)$ і $\overrightarrow{AC} = (-1; 3)$, відповідно, в вектори $\overrightarrow{A'B'} = (0; 3)$ і $\overrightarrow{A'C'} = (2; -5)$. Підставивши координати цих векторів у рівняння (7.1), отримуємо

$$\begin{cases} 0 = a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot (-1) \\ 3 = a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot (-1) \\ 2 = a_{11} \cdot (-1) + a_{12} \cdot 3 \\ -5 = a_{21} \cdot (-1) + a_{22} \cdot 3. \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, одержимо

$$a_{11} = 1,\ a_{12} = 1,\ a_{21} = 2,\ a_{22} = -1.$$

Отож, маємо такі формули: $\begin{cases} \tilde{x} = x + y + a \\ \tilde{y} = 2x - y + b. \end{cases}$

Оскільки точка A переходить у точку A', то $\begin{cases} 1 = 2 + 1 + a \\ 6 = 4 - 1 + b. \end{cases}$

Звідси $a = -2, b = 3$.

Отже, шукане афінне перетворення набуває вигляду

$$\begin{cases} \tilde{x} = x + y - 2 \\ \tilde{y} = 2x - y + 3. \end{cases}$$

Щоб знайти образ точки $M(5;7)$, підставимо в рівняння знайденого афінного перетворення замість x, y координати точки M. Отримуємо

$$\begin{cases} \tilde{x} = 5 + 7 - 2 = 10 \\ \tilde{y} = 10 - 7 + 3 = 6. \end{cases}$$

Отже, точка M переходить в точку $M'(10;6)$.

Нехай $N(x_0;y_0)$ нерухома точка, тоді $\begin{cases} x_0 = x_0 + y_0 - 2 \\ y_0 = 2x_0 - y_0 + 3 \end{cases}$.

Розв'язавши систему рівнянь, отримуємо нерухому точку $N\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Приклад 7.2. Знайдіть афінне перетворення, яке є стиском до прямої $2x + y - 2 = 0$ з коефіцієнтом стиску 3. Система координат прямокутна.

Розв'язання. *Перший спосіб.* Нехай шукане афінне перетворення набуває вигляду $\begin{cases} \tilde{x} = a_{11}x + a_{12}y + a \\ \tilde{y} = a_{21}x + a_{22}y + b \end{cases}$ Розглянемо відповідне лінійне перетворення $\begin{cases} \tilde{\alpha} = a_{11}\alpha + a_{12}\beta \\ \tilde{\beta} = a_{21}\alpha + a_{22}\beta. \end{cases}$

Напрямний вектор заданої прямої $\vec{p} = (-1;2)$ за допомогою цього перетворення переходить у цей самий вектор, а нормальний вектор прямої $\vec{n} = (2;1)$ — у вектор $3\vec{n} = (6;3)$. Враховуючи це, запишемо

систему рівнянь

$$\begin{cases} -1 = -a_{11} + 2a_{12} \\ 2 = -a_{21} + 2a_{22} \\ 6 = 2a_{11} + a_{12} \\ 3 = 2a_{21} + a_{22}. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримуємо

$$a_{11} = \frac{13}{5},\ a_{12} = \frac{4}{5},\ a_{21} = \frac{4}{5},\ a_{22} = \frac{7}{5}.$$

Отож,

$$\begin{cases} \tilde{x} = \frac{13}{5}x + \frac{4}{5}y + a \\ \tilde{y} = \frac{4}{5}x + \frac{7}{5}y + b. \end{cases}$$

Позаяк точки заданої прямої при шуканому афінному перетворенні є нерухомими, то точка $A(1;0)$ переходить сама в себе, тобто

$$\begin{cases} 1 = \frac{13}{5} \cdot 1 + \frac{4}{5} \cdot 0 + a \\ 0 = \frac{4}{5} \cdot 1 + \frac{7}{5} \cdot 0 + b. \end{cases}$$

Звідси $a = -\frac{8}{5},\ b = -\frac{4}{5}$.

Отже, шукане афінне перетворення задається так:

$$\begin{cases} \tilde{x} = \frac{13}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{8}{5} \\ \tilde{y} = \frac{4}{5}x + \frac{7}{5}y - \frac{4}{5}. \end{cases}$$

Другий спосіб. Зафіксуємо точку $O'(1;0)$, яка належить заданій прямій. Напрямним вектором заданої прямої є вектор $\vec{p} = (1;-2)$.

Зафіксуємо нову прямокутну систему координат $O'_{\vec{i}\,',\vec{j}\,'}$, де

$$\vec{i}\,' = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\quad \vec{j}\,' = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Очевидно, в цій системі координат задана пряма збігається з віссю $O'x'$. Отже, в системі координат $O'_{\vec i\,'\vec j\,'}$ шукане перетворення задається формулами

$$\begin{cases} \tilde x\,' = x' \\ \tilde y\,' = 3y'. \end{cases} \qquad (7.2)$$

Запишемо формули переходу від заданої системи координат $O_{\vec i \vec j}$ до нової системи координат $O'_{\vec i\,'\vec j\,'}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \\ -\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \\ -\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix}. \qquad (7.3)$$

Запишемо знайдене афінне перетворення в старій системі координат. Для цього формули (7.3) підставимо в (7.2)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde x \\ \tilde y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix} \right].$$

Звідси

$$\begin{pmatrix} \tilde x \\ \tilde y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \right.$$

$$\left. - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \\ -\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \\ -\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{6}{\sqrt5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \\ -\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & \frac{6}{\sqrt5} \\ -\frac{2}{\sqrt5} & \frac{3}{\sqrt5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{13}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{13}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Отож, шукане афінне перетворення задається формулами

$$\begin{cases} \tilde x = \frac{13}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{8}{5} \\ \tilde y = \frac{4}{5}x + \frac{7}{5}y - \frac{4}{5}. \end{cases}$$

Приклад 7.3. Напишіть формули афінного перетворення, яке є:

а) поворотом орієнтованої площини на кут φ навколо початку координат;

б) поворотом орієнтованої площини на кут φ навколо точки $M_0(x_0; y_0)$.

Розв'язання. а) Нехай Oxy прямокутна система координат на площині і $M(x;y)$ довільна точка площини. При повороті площини навколо точки O на кут φ система координат Oxy переходить у систему координат $Ox'y'$, де орієнтований кут від осі Ox до осі Ox' дорівнює φ. Точка M у цьому перетворенні перейде в точку M', яка має координати $(x;y)$ у системі координат $Ox'y'$. Нехай $(x';y')$ координати точки M' в системі координат Oxy. Застосуємо до точки M' формули перетворення координат, розглядаючи $(x;y)$ як "нові" координати точки M' в системі координат $Ox'y'$, а $(x';y')$ як "старі" координати точки M' у системі координат Oxy. Отримаємо

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' &= x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{aligned}. \qquad (7.4)$$

Рівності (7.4) виражають координати точки M' через координати точки M в тій самій системі координат Oxy. Отже, формули (7.4) є шуканими формулами повороту орієнтованої площини на кут φ навколо початку координат.

б) Формули (7.4) можна розглядати також як вираження координат вектора $\overrightarrow{OM'}$ через координати вектора $\overrightarrow{OM}$. Нехай у прямокутній системі координат Oxy задано точку $M_0(x_0;y_0)$ і координати $(x;y)$ довільної точки M площини. При повороті площини навколо точки M_0 на кут φ точка M переходить у точку $M'(x';y')$. Застосовуючи формули (7.4) до вектора $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0;y-y_0)$ і його образу $\overrightarrow{M_0M'}(x'-x_0;y'-y_0)$, отримуємо

$$\begin{aligned} x'-x_0 &= (x-x_0)\cos\varphi - (y-y_0)\sin\varphi \\ y'-y_0 &= (x-x_0)\sin\varphi + (y-y_0)\cos\varphi \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi + x_0(1-\cos\varphi) + y_0\sin\varphi \\ y' &= x\sin\varphi + y\cos\varphi - x_0\sin\varphi + y_0(1-\cos\varphi) \end{aligned}.$$

Задача 7.4. Знайдіть таке афінне перетворення, за якого прямі $A_1x+B_1y+C_1=0$ і $L_1x+M_1y+N_1=0$ переходять, відповідно, в прямі $A_2x+B_2y+C_2=0$ і $L_2x+M_2y+N_2=0$, а точка $K_1(x_1;y_1)$ в точку $K_2(x_2;y_2)$.

Розв'язання. Нехай $(\tilde{x},\tilde{y})=\varphi(x,y)$ шукане афінне перетворення. Прообразом прямих $A_2x+B_2y+C_2=0$ і $L_2x+M_2y+N_2=0$ у цьому

перетворенні є прямі $A_2\tilde{x}+B_2\tilde{y}+C_2=0$ і $L_2\tilde{x}+M_2\tilde{y}+N_2=0$, які збігаються з прямими $A_1x+B_1y+C_1=0$ і $L_1x+M_1y+N_1=0$, відповідно. Тобто

$$\begin{cases} A_2\tilde{x}+B_2\tilde{y}+C_2 = k(A_1x+B_1y+C_1) \\ L_2\tilde{x}+M_2\tilde{y}+N_2 = \lambda(L_1x+M_1y+N_1). \end{cases} \qquad (7.5)$$

Ми отримали сім'ю афінних перетворень, які задані дві прямі переводять у задані дві прямі. Коефіцієнти k і λ знаходимо з умови, що точка $K_1(x_1;y_1)$ переходить у точку $K_2(x_2;y_2)$, тобто

$$\begin{aligned} A_2x_2+B_2y_2+C_2 &= k(A_1x_1+B_1y_1+C_1) \\ L_2x_2+M_2y_2+N_2 &= \lambda(L_1x_1+M_1y_1+N_1). \end{aligned}$$

Звідси

$$k=\frac{A_2x_2+B_2y_2+C_2}{A_1x_1+B_1y_1+C_1},\quad \lambda=\frac{L_2x_2+M_2y_2+N_2}{L_1x_1+M_1y_1+N_1}.$$

Підставивши ці значення в (7.5), отримуємо

$$\begin{cases} A_2\tilde{x}+B_2\tilde{y}+C_2 = \dfrac{A_2x_2+B_2y_2+C_2}{A_1x_1+B_1y_1+C_1}(A_1x+B_1y+C_1) \\ \\ L_2\tilde{x}+M_2\tilde{y}+N_2 = \dfrac{L_2x_2+M_2y_2+N_2}{L_1x_1+M_1y_1+N_1}(L_1x+M_1y+N_1). \end{cases}$$

Це і є шуканим перетворенням.

Вправи

7.1.1. Задано афінне перетворення $\begin{cases} \tilde{x}=3x+y-6 \\ \tilde{y}=x+y+1 \end{cases}$. Яка точка переходить у цьому перетворенні в точку $(9;8)$? Система координат прямокутна.

7.1.2. Задано афінне перетворення $\begin{cases} \tilde{x}=2x-5y \\ \tilde{y}=2x+3y \end{cases}$. Знайдіть вектори, які у цьому перетворенні переходять у вектори, колінеарні до них. Система координат прямокутна.

7.1.3. Задано афінне перетворення $\begin{cases} \tilde{x} = 10x + 11y \\ \tilde{y} = 10x + 9y \end{cases}$. Знайдіть вектори, які у цьому перетворенні переходять у вектори, ортогональні до них. Система координат прямокутна.

7.1.4. Знайдіть афінне перетворення, яке точку $A(6; -2)$ переводить у точку $A'(1;1)$, а вектори $\vec{a} = (2;1)$ і $\vec{b} = (-1;2)$ у вектори $\vec{a}' = (4;2)$ і $\vec{b}' = (-3;6)$, відповідно. Система координат прямокутна.

7.1.5. Визначте афінне перетворення, яке точки $A_1(1;0)$, $A_2(0;2)$, $A_3(-3;0)$ переводить у точки $A_1'(2;3)$, $A_2'(-1;4)$, $A_3'(-2;-1)$, відповідно. Система координат прямокутна.

7.1.6. У деякій прямокутній системі координат Oxy запишіть формули таких афінних перетворень:

а) тотожне перетворення;

б) симетрія стосовно осі Ox;

в) симетрія стосовно осі Oy;

г) поворот площини навколо початку координат на кут $\frac{\pi}{2}$;

ґ) симетрія стосовно початку координат;

д) гомотетія з центром у початку координат і коефіцієнтом $k > 0$ (тобто кожна точка M переходить в точку M', яка лежить на промені OM і таку, що $\frac{|\overrightarrow{OM'}|}{|\overrightarrow{OM}|} = k$);

е) стиск до осі абсцис з коефіцієнтом стиску $k > 0$ (тобто кожна точка M переходить у точку M', яка лежить на перпендикулярі MP, що опущено з точки M на вісь абсцис, по той самий бік від точки P що і точка M, і таку, що $\frac{|\overrightarrow{PM'}|}{|\overrightarrow{PM}|} = k$).

7.1.7. Знайдіть афінне перетворення, яке є стиском до прямої $x - 3y = 0$ з коефіцієнтом стиску 2. Система координат прямокутна.

7.1.8. Знайдіть афінне перетворення, яке є стиском до прямої $3x + y - 1 = 0$ з коефіцієнтом стиску $\frac{1}{3}$. Система координат прямокутна.

7.1.9. Задано афінне перетворення $\begin{cases} \tilde{x} = 2x + 3y + 5 \\ \tilde{y} = 4x - 3y - 2. \end{cases}$

В які прямі перейдуть у цьому перетворенні:

а) осі Ox і Oy;

б) прямі $2x + 3y + 5 = 0$ і $4x - 3y - 2 = 0$;

в) пряма $2x - 6y - 7 = 0$.

7.1.10. Задано афінне перетворення $\begin{cases} \tilde{x} = 3x + 4y - 12 \\ \tilde{y} = 4x - 3y + 6. \end{cases}$ На прямій $7x - 2y - 24 = 0$ знайдіть таку точку, яка у цьому перетворенні перейде в точку, яка лежить на цій самій прямій.

7.1.11. Задано афінне перетворення $\begin{cases} \tilde{x} = 2x + y - 2 \\ \tilde{y} = x - y - 1 \end{cases}$ і координати точки $A(1;1)$. Знайдіть пряму, яка проходить через точку A і у заданому перетворенні переходить в пряму, що теж проходить через точку A.

7.1.12. Знайдіть таке афінне перетворення, за якого точка переходить у точку їй симетричну стосовно прямої $x + y - 5 = 0$.

7.1.13. Знайдіть інваріантні точки й інваріантні прямі афінного перетворення $\begin{cases} \tilde{x} = 7x - y + 1 \\ \tilde{y} = 4x + 2y + 4. \end{cases}$

7.1.14. Задано два афінних перетворення

$$f: \begin{cases} \tilde{x} = 2x + y - 5 \\ \tilde{y} = x - y + 4 \end{cases} \text{ і } g: \begin{cases} \tilde{x} = 3x - y + 7 \\ \tilde{y} = -x + 2y + 5 \end{cases}$$

Знайдіть $f \circ g$ і $g \circ f$. Система координат прямокутна.

7.1.15. Знайдіть афінне перетворення, яке є добутком стиску до прямої $x + y - 1 = 0$ з коефіцієнтом стиску $\frac{1}{2}$ і симетрії стосовно цієї прямої.

7.1.16. Знайдіть афінне перетворення, яке є добутком симетрії стосовно прямої $x + 3y - 5 = 0$ і гомотетії з центром у точці $(2;1)$ з коефіцієнтом 3.

7.1.17. Знайдіть афінне перетворення, яке є добутком стиску до прямої $x + y - 2 = 0$ з коефіцієнтом $\frac{1}{2}$ і стиском до прямої $x - y = 0$ з коефіцієнтом 2.

7.1.18. Знайдіть афінне перетворення, за якого прямі $5x - 6y - 7 = 0$ і $3x - 4y = 0$ переходять, відповідно, в прямі $2x + y - 4 = 0$ і $x - y + 1 = 0$, а точка $(6;4)$ в точку $(2;1)$.

7.1.19. а) Знайдіть таке афінне перетворення, за якого точки $O(0;0;0)$, $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$ залишаються нерухомими, а точка $C(0;0;1)$ переходить у точку $C'(1;1;1)$.

б) Вершини піраміди $OBCD$ в деякій афінній системі координат мають координати $O(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;1;0)$, $D(0;0;1)$. Знайдіть афінне перетворення, за якого вершина O є нерухомою, а середини ребер $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ переходять у середини протилежних до них ребер.

в) Знайдіть афінне перетворення, яке є стиском площини до площини $2x-2y+z-2=0$ з коефіцієнтом стиску $\dfrac{1}{2}$. Система координат прямокутна.

7.1.20. Запишіть формули перетворення гомотетії площини з коефіцієнтом k :

а) з центром у початку координат;

б) з центром у точці $M_0(x_0;y_0)$.

Система координат афінна.

7.1.21.* Доведіть, що при афінному перетворенні площини (відповідно, до простору) площа орієнтованого паралелограма (відповідно, об'єм орієнтованого паралелепіпеда) домножується на визначник матриці перетворення.

7.1.22. Через точку $P(15;6)$ проведіть пряму, яка відтинає від прямих трикутник, площа якого дорівнює 29.

7.1.23. З'ясуйте геометричний зміст перетворення, яке переводить вершини трикутника ABC у середини протилежних їм сторін.

7.1.24. Кінці спряжених діаметрів еліпса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ з'єднані хордами. Визначте геометричне місце їхніх середин.

7.1.25. Задане афінне перетворення $\begin{cases} \tilde{x}=\dfrac{5}{4}x \\ \tilde{y}=\dfrac{5}{13}y \end{cases}$. Знайдіть такі прямі, які у цьому перетворенні ізометрично відображаються на свої образи.

7.1.26.* Навколо еліпса описано чотирикутник. Доведіть, що сума площ двох трикутників, які мають спільною вершиною центр еліпса, а основами, відповідно, дві протилежні сторони чотирикутника, дорівнює сумі площ двох інших таких трикутників.

7.1.27.* Доведіть, що всі поверхні другого порядку, крім гіперболічного параболоїда, можна отримати внаслідок стиску з поверхні обертання.

Відповіді до розділу 7

7.1.1. $(4;3)$. **7.1.2.** Дійсних векторів немає. **7.1.3.** $(3k;-2k)$, $(3k;-5k)$, k — довільне дійсне число. **7.1.4.** $\begin{cases} \tilde{x}=\frac{11}{5}x-\frac{2}{5}y-13 \\ \tilde{y}=-\frac{2}{5}x+\frac{14}{5}y+9 \end{cases}$. **7.1.5.** $\begin{cases} \tilde{x}=x-y+1 \\ \tilde{y}=x+y+2 \end{cases}$. **7.1.6.** а) $\begin{cases} \tilde{x}=x \\ \tilde{y}=y \end{cases}$; б) $\begin{cases} \tilde{x}=x \\ \tilde{y}=-y \end{cases}$; в) $\begin{cases} \tilde{x}=-x \\ \tilde{y}=y \end{cases}$; г) $\begin{cases} \tilde{x}=-y \\ \tilde{y}=x \end{cases}$; ґ) $\begin{cases} \tilde{x}=-x \\ \tilde{y}=-y \end{cases}$; д) $\begin{cases} \tilde{x}=kx \\ \tilde{y}=ky \end{cases}$; е) $\begin{cases} \tilde{x}=x \\ \tilde{y}=ky \end{cases}$.
7.1.7. $\begin{cases} \tilde{x}=\frac{11}{10}x-\frac{3}{10}y \\ \tilde{y}=-\frac{3}{10}x+\frac{19}{10}y \end{cases}$. **7.1.8.** $\begin{cases} \tilde{x}=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}y+\frac{1}{5} \\ \tilde{y}=-\frac{1}{5}x+\frac{14}{15}y+\frac{1}{15} \end{cases}$. **7.1.9.** а) $2x-y-12=0$, $x+y-3=0$; б) $x=0$, $y=0$; в) $x-y=0$. **7.1.10.** $(4;2)$. **7.1.11.** $2x+y-3=0$. **7.1.12.** $\begin{cases} \tilde{x}=-y+5 \\ \tilde{y}=-x+5 \end{cases}$. **7.1.13.** $2x-2y-3=0$, $4x-y=0$. **7.1.15.** $\begin{cases} \tilde{x}=\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}y+\frac{3}{4} \\ \tilde{y}=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{3}{4} \end{cases}$. **7.1.16.** $\begin{cases} \tilde{x}=\frac{12}{5}x-\frac{9}{5}y-1 \\ \tilde{y}=-\frac{9}{5}x-\frac{12}{5}y+7 \end{cases}$.
7.1.17. $\begin{cases} \tilde{x}=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}y+\frac{1}{2} \\ \tilde{y}=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y+\frac{1}{2} \end{cases}$. **7.1.18.** $\begin{cases} \tilde{x}=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{10}{3} \\ \tilde{y}=-\frac{11}{3}x+\frac{14}{3}y+\frac{13}{3} \end{cases}$. **7.1.19.** а) $\begin{cases} \tilde{x}=x+z \\ \tilde{y}=y+z \\ \tilde{z}=z \end{cases}$; б) $\begin{cases} \tilde{x}=y+z \\ \tilde{y}=x+z \\ \tilde{z}=x+y \end{cases}$; в) $\begin{cases} \tilde{x}=\dfrac{7}{9}x+\dfrac{2}{9}y-\dfrac{1}{9}z+\dfrac{2}{9} \\ \tilde{y}=\dfrac{2}{9}x+\dfrac{7}{9}y+\dfrac{1}{9}z-\dfrac{2}{9} \\ \tilde{z}=-\dfrac{1}{9}x+\dfrac{1}{9}y+\dfrac{17}{18}z+\dfrac{1}{9} \end{cases}$.
7.1.20. а) $\begin{cases} \tilde{x}=kx \\ \tilde{y}=ky \end{cases}$; б) $\begin{cases} \tilde{x}=kx+x_0(1-k) \\ \tilde{y}=ky+y_0(1-k) \end{cases}$. **7.1.22.** $x-12y+57=0$, $8x-9y-66=0$.
7.1.23. Гомотетія з центром у точці перетину медіан трикутника і коефіцієнтом стиску $-\frac{1}{2}$. **7.1.24.** Еліпс з півосями $\frac{a}{\sqrt{2}}$, $\frac{b}{\sqrt{2}}$. **7.1.25.** $13x+16y=0$.
7.1.26. Афінне перетворення переводить еліпс у коло.

Розділ 8
Завдання для індивідуального виконання

Задача 8.1. *У паралелограмі $ABCD$ точки M і N ділять відрізки BC і CD, відповідно, у відношеннях: $BM:MC = m:n$, $CN:ND = k:s$. Приймаючи за базові вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, знайдіть у цій базі координати векторів* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{ND}$, $\overrightarrow{MN}$*:*

1. $m = 1$, $n = 2$, $k = 2$, $s = 3$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{MC}$.
2. $m = 2$, $n = 1$, $k = 4$, $s = 3$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{MC}$.
3. $m = 2$, $n = 3$, $k = 1$, $s = 3$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{MC}$.
4. $m = 1$, $n = 3$, $k = 2$, $s = 1$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{MC}$.
5. $m = 3$, $n = 1$, $k = 2$, $s = 3$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{MC}$.
6. $m = 2$, $n = 3$, $k = 1$, $s = 2$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{MC}$.
7. $m = 1$, $n = 2$, $k = 2$, $s = 3$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AD}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{CN}$.
8. $m = 2$, $n = 1$, $k = 4$, $s = 3$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AD}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{CN}$.
9. $m = 2$, $n = 3$, $k = 1$, $s = 3$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AD}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{CN}$.
10. $m = 1$, $n = 3$, $k = 5$, $s = 3$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AD}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{CN}$.
11. $m = 3$, $n = 1$, $k = 4$, $s = 1$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AD}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{CN}$.
12. $m = 2$, $n = 1$, $k = 2$, $s = 3$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AD}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{CN}$.
13. $m = 3$, $n = 5$, $k = 2$, $s = 1$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{CD}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BM}$.
14. $m = 1$, $n = 3$, $k = 5$, $s = 2$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{CD}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BM}$.
15. $m = 1$, $n = 2$, $k = 7$, $s = 3$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{CD}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BM}$.
16. $m = 2$, $n = 5$, $k = 2$, $s = 3$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{CD}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BM}$.
17. $m = 1$, $n = 2$, $k = 3$, $s = 2$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{CD}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BM}$.
18. $m = 5$, $n = 2$, $k = 7$, $s = 3$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{CD}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BM}$.
19. $m = 2$, $n = 5$, $k = 2$, $s = 7$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{CB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{DN}$.
20. $m = 1$, $n = 4$, $k = 5$, $s = 3$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{CB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{DN}$.
21. $m = 1$, $n = 2$, $k = 7$, $s = 3$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{CB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{DN}$.
22. $m = 2$, $n = 3$, $k = 1$, $s = 7$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{CB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{DN}$.
23. $m = 1$, $n = 5$, $k = 5$, $s = 2$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{CB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{DN}$.
24. $m = 1$, $n = 2$, $k = 8$, $s = 3$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{CB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{DN}$.
25. $m = 1$, $n = 1$, $k = 2$, $s = 3$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BD}$.

26. $m = 5$, $n = 2$, $k = 4$, $s = 3$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BD}$.
27. $m = 1$, $n = 8$, $k = 5$, $s = 3$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BD}$.
28. $m = 1$, $n = 8$, $k = 2$, $s = 1$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BD}$.
29. $m = 5$, $n = 3$, $k = 2$, $s = 3$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BD}$.
30. $m = 1$, $n = 6$, $k = 5$, $s = 2$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BD}$.

Задача 8.2. *У трапеції $ABCD$ задано відношення довжин основ $AD : BC = n : m$. Приймаючи за початок координат вершину A, а за базові вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, знайдіть координати вершин трапеції, точки M перетину її діагоналей і точки S перетину продовження бічних сторін:*

1. $m = 3$, $n = 2$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BC}$.
2. $m = 2$, $n = 1$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BC}$.
3. $m = 7$, $n = 3$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BC}$.
4. $m = 3$, $n = 5$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BC}$.
5. $m = 2$, $n = 5$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BC}$.
6. $m = 7$, $n = 8$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BC}$.
7. $m = 5$, $n = 2$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AD}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BD}$.
8. $m = 4$, $n = 1$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AD}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BD}$.
9. $m = 8$, $n = 3$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AD}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BD}$.
10. $m = 3$, $n = 4$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AD}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BD}$.
11. $m = 3$, $n = 5$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AD}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BD}$.
12. $m = 6$, $n = 7$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AD}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BD}$.
13. $m = 6$, $n = 5$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{CD}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}$.
14. $m = 5$, $n = 4$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{CD}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}$.
15. $m = 7$, $n = 2$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{CD}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}$.
16. $m = 1$, $n = 5$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{CD}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}$.
17. $m = 1$, $n = 4$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{CD}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}$.
18. $m = 2$, $n = 7$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{CD}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}$.
19. $m = 7$, $n = 5$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{CB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{DB}$.
20. $m = 7$, $n = 4$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{CB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{DB}$.
21. $m = 5$, $n = 2$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{CB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{DB}$.
22. $m = 2$, $n = 5$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{CB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{DB}$.
23. $m = 3$, $n = 4$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{CB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{DB}$.
24. $m = 5$, $n = 7$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{CB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{DB}$.
25. $m = 3$, $n = 1$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BD}$.
26. $m = 5$, $n = 1$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BD}$.
27. $m = 6$, $n = 1$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BD}$.
28. $m = 3$, $n = 7$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BD}$.
29. $m = 5$, $n = 6$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BD}$.
30. $m = 6$, $n = 7$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BD}$.

Задача 8.3. *У трикутнику ABC проведено медіани AM, BN, CL. Знайдіть формули переходу між такими системами координат:*

1. $A_{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}}$ і $C_{\overrightarrow{NC},\overrightarrow{BA}}$.
2. $B_{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}}$ і $C_{\overrightarrow{NC},\overrightarrow{BA}}$.
3. $A_{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}}$ і $B_{\overrightarrow{NC},\overrightarrow{BA}}$.
4. $A_{\overrightarrow{LB},\overrightarrow{BC}}$ і $C_{\overrightarrow{BN},\overrightarrow{AB}}$.
5. $A_{\overrightarrow{LB},\overrightarrow{BC}}$ і $B_{\overrightarrow{BN},\overrightarrow{AB}}$.
6. $B_{\overrightarrow{LB},\overrightarrow{BC}}$ і $C_{\overrightarrow{BN},\overrightarrow{AB}}$.
7. $A_{\overrightarrow{CM},\overrightarrow{BN}}$ і $C_{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}}$.
8. $B_{\overrightarrow{CM},\overrightarrow{BN}}$ і $C_{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}}$.
9. $A_{\overrightarrow{CM},\overrightarrow{BN}}$ і $B_{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}}$.
10. $A_{\overrightarrow{AN},\overrightarrow{BA}}$ і $C_{\overrightarrow{NB},\overrightarrow{BM}}$.
11. $A_{\overrightarrow{AN},\overrightarrow{BA}}$ і $B_{\overrightarrow{NB},\overrightarrow{BM}}$.
12. $B_{\overrightarrow{AN},\overrightarrow{BA}}$ і $C_{\overrightarrow{NB},\overrightarrow{BM}}$.
13. $C_{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}}$ і $B_{\overrightarrow{NC},\overrightarrow{BA}}$.
14. $C_{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AC}}$ і $A_{\overrightarrow{CL},\overrightarrow{BN}}$.
15. $B_{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BL}}$ і $C_{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BM}}$.
16. $A_{\overrightarrow{LC},\overrightarrow{AM}}$ і $C_{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{BA}}$.
17. $B_{\overrightarrow{AN},\overrightarrow{BM}}$ і $C_{\overrightarrow{NC},\overrightarrow{CL}}$.
18. $A_{\overrightarrow{AL},\overrightarrow{AM}}$ і $B_{\overrightarrow{NC},\overrightarrow{CL}}$.
19. $C_{\overrightarrow{LB},\overrightarrow{BC}}$ і $B_{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AB}}$.
20. $A_{\overrightarrow{AN},\overrightarrow{BC}}$ і $B_{\overrightarrow{CM},\overrightarrow{AB}}$.
21. $B_{\overrightarrow{LB},\overrightarrow{BN}}$ і $C_{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CL}}$.
22. $A_{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{LA}}$ і $C_{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AN}}$.
23. $B_{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{NB}}$ і $C_{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{MB}}$.
24. $A_{\overrightarrow{CM},\overrightarrow{BL}}$ і $B_{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AN}}$.
25. $A_{\overrightarrow{AN},\overrightarrow{BM}}$ і $C_{\overrightarrow{CL},\overrightarrow{BN}}$.
26. $A_{\overrightarrow{AL},\overrightarrow{BC}}$ і $B_{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{BL}}$.
27. $B_{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BN}}$ і $C_{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{LA}}$.
28. $C_{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CM}}$ і $A_{\overrightarrow{CN},\overrightarrow{CL}}$.
29. $C_{\overrightarrow{CL},\overrightarrow{NC}}$ і $B_{\overrightarrow{CM},\overrightarrow{AB}}$.
30. $B_{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{MB}}$ і $A_{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CL}}$.

Задача 8.4. *Задано вектори* $\vec{a} = \alpha\vec{m} + \beta\vec{n}$, $\vec{b} = \gamma\vec{m} + \delta\vec{n}$, *де* $|\vec{m}| = k$, $|\vec{n}| = l$, $\angle(\vec{m},\vec{n}) = \varphi$. *Знайдіть:*
1) $|\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}|$; 2) $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$; 3) $p_{\vec{b}}(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b})$.

1. $\alpha = 3$, $\beta = -2$, $\gamma = 4$, $\delta = 5$, $k = 3$, $l = 5$, $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$, $\lambda = -2$, $\mu = 3$.
2. $\alpha = 5$, $\beta = -4$, $\gamma = -5$, $\delta = 2$, $k = 7$, $l = 2$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$, $\lambda = -6$, $\mu = -3$.
3. $\alpha = -3$, $\beta = 2$, $\gamma = -4$, $\delta = -5$, $k = 3$, $l = 5$, $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$, $\lambda = 2$, $\mu = -3$.
4. $\alpha = -4$, $\beta = -2$, $\gamma = -6$, $\delta = 3$, $k = 8$, $l = 5$, $\varphi = \dfrac{4\pi}{3}$, $\lambda = -2$, $\mu = -3$.
5. $\alpha = -7$, $\beta = -2$, $\gamma = -4$, $\delta = -7$, $k = 13$, $l = 5$, $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$, $\lambda = 2$, $\mu = -3$.
6. $\alpha = 13$, $\beta = -2$, $\gamma = 4$, $\delta = -5$, $k = 7$, $l = 9$, $\varphi = \dfrac{4\pi}{3}$, $\lambda = 3$, $\mu = 3$.
7. $\alpha = 4$, $\beta = -8$, $\gamma = 4$, $\delta = -6$, $k = 3$, $l = 15$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$, $\lambda = 12$, $\mu = 3$.
8. $\alpha = 5$, $\beta = -9$, $\gamma = -4$, $\delta = 5$, $k = 9$, $l = 5$, $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$, $\lambda = 2$, $\mu = 9$.
9. $\alpha = 7$, $\beta = 3$, $\gamma = -7$, $\delta = 3$, $k = 6$, $l = 2$, $\varphi = \dfrac{4\pi}{3}$, $\lambda = -8$, $\mu = -3$.
10. $\alpha = 8$, $\beta = -9$, $\gamma = -3$, $\delta = 7$, $k = 31$, $l = 9$, $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$, $\lambda = -4$, $\mu = 3$.
11. $\alpha = 9$, $\beta = -2$, $\gamma = 6$, $\delta = -7$, $k = 12$, $l = 6$, $\varphi = \dfrac{5\pi}{3}$, $\lambda = 2$, $\mu = -8$.
12. $\alpha = 5$, $\beta = -2$, $\gamma = -9$, $\delta = 5$, $k = 2$, $l = 5$, $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$, $\lambda = 2$, $\mu = 13$.

13. $\alpha = 7$, $\beta = -6$, $\gamma = 5$, $\delta = 4$, $k = 8$, $l = 5$, $\varphi = \dfrac{5\pi}{3}$, $\lambda = 9$, $\mu = 3$.
14. $\alpha = 9$, $\beta = -2$, $\gamma = -4$, $\delta = 5$, $k = 7$, $l = 5$, $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$, $\lambda = -6$, $\mu = -5$.
15. $\alpha = 3$, $\beta = -8$, $\gamma = 5$, $\delta = 5$, $k = 3$, $l = 8$, $\varphi = \dfrac{7\pi}{3}$, $\lambda = -3$, $\mu = 3$.
16. $\alpha = 13$, $\beta = -2$, $\gamma = 14$, $\delta = 5$, $k = 3$, $l = 15$, $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$, $\lambda = -2$, $\mu = -3$.
17. $\alpha = -3$, $\beta = 2$, $\gamma = 14$, $\delta = 5$, $k = 8$, $l = 5$, $\varphi = \dfrac{7\pi}{3}$, $\lambda = -9$, $\mu = 7$.
18. $\alpha = 5$, $\beta = -7$, $\gamma = 8$, $\delta = 5$, $k = 8$, $l = 3$, $\varphi = \dfrac{7\pi}{3}$, $\lambda = -9$, $\mu = 3$.
19. $\alpha = 7$, $\beta = -9$, $\gamma = -3$, $\delta = 5$, $k = 5$, $l = 8$, $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$, $\lambda = -9$, $\mu = 4$.
20. $\alpha = 3$, $\beta = -7$, $\gamma = 4$, $\delta = -5$, $k = 10$, $l = 7$, $\varphi = \dfrac{5\pi}{3}$, $\lambda = 7$, $\mu = -3$.
21. $\alpha = 8$, $\beta = -2$, $\gamma = 6$, $\delta = 8$, $k = 3$, $l = 15$, $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$, $\lambda = 8$, $\mu = -9$.
22. $\alpha = 5$, $\beta = -9$, $\gamma = 2$, $\delta = 9$, $k = 8$, $l = 9$, $\varphi = \dfrac{7\pi}{3}$, $\lambda = 3$, $\mu = 3$.
23. $\alpha = 7$, $\beta = 9$, $\gamma = -5$, $\delta = 3$, $k = 8$, $l = 5$, $\varphi = \dfrac{8\pi}{3}$, $\lambda = -2$, $\mu = 7$.
24. $\alpha = 2$, $\beta = -7$, $\gamma = 3$, $\delta = 5$, $k = 6$, $l = 5$, $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$, $\lambda = 4$, $\mu = -5$.
25. $\alpha = 9$, $\beta = -2$, $\gamma = 7$, $\delta = 6$, $k = 9$, $l = 4$, $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$, $\lambda = 2$, $\mu = -7$.
26. $\alpha = 6$, $\beta = 4$, $\gamma = -4$, $\delta = -5$, $k = 8$, $l = 9$, $\varphi = \dfrac{5\pi}{3}$, $\lambda = 3$, $\mu = 9$.
27. $\alpha = 3$, $\beta = -2$, $\gamma = -4$, $\delta = -3$, $k = 8$, $l = 7$, $\varphi = \dfrac{5\pi}{3}$, $\lambda = 3$, $\mu = 5$.
28. $\alpha = 3$, $\beta = -2$, $\gamma = -4$, $\delta = 25$, $k = 9$, $l = 5$, $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$, $\lambda = -8$, $\mu = 3$.
29. $\alpha = 5$, $\beta = -7$, $\gamma = 4$, $\delta = 3$, $k = 3$, $l = 9$, $\varphi = \dfrac{4\pi}{3}$, $\lambda = -2$, $\mu = -3$.
30. $\alpha = 6$, $\beta = -2$, $\gamma = 9$, $\delta = 5$, $k = 6$, $l = 5$, $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$, $\lambda = 7$, $\mu = -5$.

Задача 8.5. *Задано координати точок* A, B, C. *Визначте:*
1) *довжину вектора* $\vec{a}$;
2) *скалярний добуток* $\vec{a}\cdot\vec{b}$;
3) *косинус кута між векторами* $\vec{b}$ і $\vec{c}$;
4) *векторний добуток* $[\vec{a},\vec{b}]$;
5) *мішаний добуток векторів* $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$;
6) *чи колінеарні вектори* $\vec{a}$ і $\vec{c}$;
7) *чи компланарні вектори* $\vec{a},\vec{b},\vec{d}$;
8) *проекцію вектора* $\vec{c}$ *на вектор* $\vec{d}$;
9) *координати точки* $M(x_0;y_0;z_0)$, *яка ділить відрізок* l *у відношенні* $\alpha:\beta$.

1. $A(2;-5;7), B(-7;3;1), C(1;-9;7)$, $\vec a = 5\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$, $\vec b = \overrightarrow{AB}$, $\vec c = \overrightarrow{AC}$, $\vec d = \overrightarrow{BC}$, $l=AB$, $\alpha=5$, $\beta=3$.
2. $A(3;-5;7), B(-7;5;1), C(8;-9;7)$, $\vec a = 5\overrightarrow{AC} - 8\overrightarrow{BC}$, $\vec b = \overrightarrow{AB}$, $\vec c = \overrightarrow{AC}$, $\vec d = \overrightarrow{BC}$, $l = CB$, $\alpha=4$, $\beta=3$.
3. $A(2;-5;9), B(-7;3;4), C(1;-9;9)$, $\vec a = 7\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$, $\vec b = \overrightarrow{AB}$, $\vec c = \overrightarrow{AC}$, $\vec d = \overrightarrow{BC}$, $l = AB$, $\alpha=5$, $\beta=8$.
4. $A(2;-7;7), B(-5;3;1), C(9;-9;7)$, $\vec a = 9\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$, $\vec b = \overrightarrow{AC}$, $\vec c = \overrightarrow{AB}$, $\vec d = \overrightarrow{BC}$, $l = AC$, $\alpha=3$, $\beta=7$.
5. $A(4;-5;-7)$, $B(7;-3;1)$, $C(1;-9;7)$, $\vec a = 5\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\vec b = \overrightarrow{AB}$, $\vec c = \overrightarrow{AC}$, $\vec d = \overrightarrow{BC}$, $l = CB$, $\alpha=5$, $\beta=4$.
6. $A(-2;5;7)$, $B(-7;3;-1)$, $C(-1;9;7)$, $\vec a = 7\overrightarrow{AB} - 8\overrightarrow{BC}$, $\vec b = \overrightarrow{AB}$, $\vec c = \overrightarrow{AC}$, $\vec d = \overrightarrow{BC}$, $l = AB$, $\alpha=4$, $\beta=9$.
7. $A(6;-7;7), B(-5;3;9), C(9;-9;3)$, $\vec a = 9\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BC}$, $\vec b = \overrightarrow{AC}$, $\vec c = \overrightarrow{AB}$, $\vec d = \overrightarrow{BC}$, $l = AB$, $\alpha=5$, $\beta=7$.
8. $A(3;-7;1), B(-5;8;1), C(2;-9;7)$, $\vec a = 4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$, $\vec b = \overrightarrow{AC}$, $\vec c = \overrightarrow{AB}$, $\vec d = \overrightarrow{BC}$, $l = AC$, $\alpha=3$, $\beta=2$.
9. $A(2;-5;7)$, $B(-3;3;1)$, $C(-4;-9;7)$, $\vec a = 9\overrightarrow{AB} - 7\overrightarrow{BC}$, $\vec b = \overrightarrow{AC}$, $\vec c = \overrightarrow{AB}$, $\vec d = \overrightarrow{BC}$, $l = AC$, $\alpha=9$, $\beta=7$.
10. $A(2;7;7), B(-5;3;-1), C(2;-9;7)$, $\vec a = 7\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$, $\vec b = \overrightarrow{AC}$, $\vec c = \overrightarrow{AB}$, $\vec d = \overrightarrow{BC}$, $l = AC$, $\alpha=13$, $\beta=7$.
11. $A(-2;-7;7), B(-5;3;1), C(9;9;7)$, $\vec a = 9\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{BC}$, $\vec b = \overrightarrow{AC}$, $\vec c = \overrightarrow{AB}$, $\vec d = \overrightarrow{BC}$, $l = AB$, $\alpha=2$, $\beta=7$.
12. $A(6;-3;7)$, $B(-5;6;1)$, $C(-3;-9;7)$, $\vec a = 4\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$, $\vec b = \overrightarrow{AC}$, $\vec c = \overrightarrow{AB}$, $\vec d = \overrightarrow{BC}$, $l = BC$, $\alpha=3$, $\beta=6$.
13. $A(2;-7;4)$, $B(5;9;1)$, $C(4;-9;7)$, $\vec a = 9\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$, $\vec b = \overrightarrow{AC}$, $\vec c = \overrightarrow{AB}$, $\vec d = \overrightarrow{BC}$, $l = AC$, $\alpha=5$, $\beta=7$.
14. $A(8;7;7)$, $B(-5;3;5)$, $C(6;-9;2)$, $\vec a = 6\overrightarrow{AB} - 9\overrightarrow{BC}$, $\vec b = \overrightarrow{AC}$, $\vec c = \overrightarrow{AB}$, $\vec d = \overrightarrow{BC}$, $l = AB$, $\alpha=3$, $\beta=8$.
15. $A(4;-5;7), B(-3;3;1), C(7;-9;7)$, $\vec a = 9\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BC}$, $\vec b = \overrightarrow{AC}$, $\vec c = \overrightarrow{AB}$, $\vec d = \overrightarrow{BC}$, $l = AC$, $\alpha=8$, $\beta=7$.
16. $A(2;-3;5)$, $B(-5;3;8)$, $C(7;-9;7)$, $\vec a = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$, $\vec b = \overrightarrow{AC}$, $\vec c = \overrightarrow{AB}$, $\vec d = \overrightarrow{BC}$, $l = BC$, $\alpha=3$, $\beta=7$.
17. $A(6;-7;2), B(-4;3;1), C(2;-9;7)$, $\vec a = 9\overrightarrow{AB} - 8\overrightarrow{BC}$, $\vec b = \overrightarrow{AC}$, $\vec c = \overrightarrow{AB}$, $\vec d = \overrightarrow{BC}$, $l = AC$, $\alpha=9$, $\beta=2$.
18. $A(2;-2;7), B(-5;3;5), C(3;-9;7)$, $\vec a = 7\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$, $\vec b = \overrightarrow{AC}$, $\vec c = \overrightarrow{AB}$, $\vec d = \overrightarrow{BC}$, $l = AB$, $\alpha=5$, $\beta=7$.
19. $A(-5;-7;3)$, $B(-3;3;1)$, $C(5;-9;7)$, $\vec a = 9\overrightarrow{AB} + 8\overrightarrow{BC}$, $\vec b = \overrightarrow{AC}$, $\vec c = \overrightarrow{AB}$, $\vec d = \overrightarrow{BC}$, $l = AC$, $\alpha=3$, $\beta=5$.

20. $A(4;-7;7), B(-5;3;1), C(9;-9;7)$, $\vec a = 9\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$, $\vec b = \overrightarrow{AC}$, $\vec c = \overrightarrow{AB}$, $\vec d = \overrightarrow{BC}$, $l = AC$, $\alpha=5$, $\beta=7$.
21. $A(-2;7;7)$, $B(5;3;-1)$, $C(-5;-9;7)$, $\vec a = 9\overrightarrow{AB} - 7\overrightarrow{BC}$, $\vec b = \overrightarrow{AC}$, $\vec c = \overrightarrow{AB}$, $\vec d = \overrightarrow{BC}$, $l = BC$, $\alpha=6$, $\beta=8$.
22. $A(2;5;-7), B(-8;3;5), C(7;-9;7)$, $\vec a = 8\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$, $\vec b = \overrightarrow{AC}$, $\vec c = \overrightarrow{AB}$, $\vec d = \overrightarrow{BC}$, $l = AC$, $\alpha=9$, $\beta=5$.
23. $A(9;-7;7), B(-5;3;1), C(3;-9;7)$, $\vec a = 5\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC}$, $\vec b = \overrightarrow{AC}$, $\vec c = \overrightarrow{AB}$, $\vec d = \overrightarrow{BC}$, $l = AB$, $\alpha=3$, $\beta=7$.
24. $A(5;-7;4), B(-5;8;-1), C(9;-9;7)$, $\vec a = 9\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$, $\vec b = \overrightarrow{AC}$, $\vec c = \overrightarrow{AB}$, $\vec d = \overrightarrow{BC}$, $l = BC$, $\alpha=5$, $\beta=4$.
25. $A(4;6;7)$, $B(6;-3;1)$, $C(9;-7;7)$, $\vec a = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$, $\vec b = \overrightarrow{AC}$, $\vec c = \overrightarrow{AB}$, $\vec d = \overrightarrow{BC}$, $l = AC$, $\alpha=8$, $\beta=6$.
26. $A(6;-5;2)$, $B(-4;3;-1)$, $C(2;-9;8)$, $\vec a = 9\overrightarrow{AB} - 8\overrightarrow{BC}$, $\vec b = \overrightarrow{AC}$, $\vec c = \overrightarrow{AB}$, $\vec d = \overrightarrow{BC}$, $l = AB$, $\alpha=9$, $\beta=2$.
27. $A(-2;-3;5)$, $B(-7;3;8)$, $C(5;-9;7)$, $\vec a = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$, $\vec b = \overrightarrow{AC}$, $\vec c = \overrightarrow{AB}$, $\vec d = \overrightarrow{BC}$, $l = BC$, $\alpha=5$, $\beta=7$.
28. $A(3;-3;5)$, $B(-5;-3;8)$, $C(4;-9;9)$, $\vec a = 2\overrightarrow{AB} - 9\overrightarrow{BC}$, $\vec b = \overrightarrow{AC}$, $\vec c = \overrightarrow{AB}$, $\vec d = \overrightarrow{BC}$, $l = AC$, $\alpha=3$, $\beta=8$.
29. $A(2;-3;8)$, $B(-5;3;5)$, $C(-7;-9;7)$, $\vec a = 6\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$, $\vec b = \overrightarrow{AC}$, $\vec c = \overrightarrow{AB}$, $\vec d = \overrightarrow{BC}$, $l = BC$, $\alpha=4$, $\beta=7$.
30. $A(4;-3;5), B(-7;2;8), C(7;-9;2)$, $\vec a = 2\overrightarrow{AB} - 7\overrightarrow{BC}$, $\vec b = \overrightarrow{AC}$, $\vec c = \overrightarrow{AB}$, $\vec d = \overrightarrow{BC}$, $l = AC$, $\alpha=5$, $\beta=8$.

Задача 8.6. *Доведіть, що вектори $\vec a, \vec b, \vec c$ утворюють базу і визначте координати вектора $\vec d$ у цій базі.*

1. $\vec a = (5;4;1)$, $\vec b = (-3;5;2)$, $\vec c = (2;-1;3)$, $\vec d = (7;23;4)$.
2. $\vec a = (2;-1;4)$, $\vec b = (-3;0;-2)$, $\vec c = (4;5;-3)$, $\vec d = (0;11;-14)$.
3. $\vec a = (-1;1;2)$, $\vec b = (2;-3;-5)$, $\vec c = (-6;3;-1)$, $\vec d = (28;-19;7)$.
4. $\vec a = (1;3;4)$, $\vec b = (-2;5;0)$, $\vec c = (3;-2;-4)$, $\vec d = (13;-5;-4)$.
5. $\vec a = (1;-1;1)$, $\vec b = (-5;-3;1)$, $\vec c = (2;-1;0)$, $\vec d = (-15;-10;5)$.
6. $\vec a = (3;1;2)$, $\vec b = (-7;-2;-4)$, $\vec c = (-4;0;3)$, $\vec d = (16;6;15)$.
7. $\vec a = (-3;0;1)$, $\vec b = (2;7;-3)$, $\vec c = (-4;3;5)$, $\vec d = (-16;33;13)$.
8. $\vec a = (5;1;2)$, $\vec b = (-2;1;-3)$, $\vec c = (4;-3;5)$, $\vec d = (15;-15;24)$.
9. $\vec a = (0;2;-3)$, $\vec b = (4;-3;-2)$, $\vec c = (-5;-4;0)$, $\vec d = (-19;-5;-4)$.
10. $\vec a = (3;-1;2)$, $\vec b = (-2;3;1)$, $\vec c = (4;-5;-3)$, $\vec d = (-3;2;-3)$.
11. $\vec a = (5;3;1)$, $\vec b = (-1;2;-3)$, $\vec c = (3;-4;2)$, $\vec d = (-9;34;-20)$.
12. $\vec a = (3;1;-3)$, $\vec b = (-2;4;1)$, $\vec c = (1;-2;5)$, $\vec d = (1;12;-20)$.
13. $\vec a = (6;1;-3)$, $\vec b = (-3;2;1)$, $\vec c = (-1;-3;4)$, $\vec d = (15;6;-17)$.

14. $\vec{a} = (4;2;3)$, $\vec{b} = (-3;1;-8)$, $\vec{c} = (2;-4;5)$, $\vec{d} = (-12;14;-31)$.
15. $\vec{a} = (-2;1;3)$, $\vec{b} = (3;-6;2)$, $\vec{c} = (-5;-3;-1)$, $\vec{d} = (31;-6;22)$.
16. $\vec{a} = (1;3;6)$, $\vec{b} = (-3;4;-5)$, $\vec{c} = (1;-7;2)$, $\vec{d} = (-2;17;5)$.
17. $\vec{a} = (7;2;1)$, $\vec{b} = (5;1;-2)$, $\vec{c} = (-3;4;5)$, $\vec{d} = (26;11;1)$.
18. $\vec{a} = (3;5;4)$, $\vec{b} = (-2;7;-5)$, $\vec{c} = (6;-2;1)$, $\vec{d} = (6;-9;22)$.
19. $\vec{a} = (5;3;2)$, $\vec{b} = (2;-5;1)$, $\vec{c} = (-7;4;-3)$, $\vec{d} = (36;1;15)$.
20. $\vec{a} = (11;1;2)$, $\vec{b} = (-3;3;4)$, $\vec{c} = (-4;-2;7)$, $\vec{d} = (-5;11;-15)$.
21. $\vec{a} = (9;5;3)$, $\vec{b} = (-3;2;1)$, $\vec{c} = (4;-7;4)$, $\vec{d} = (-10;-13;8)$.
22. $\vec{a} = (7;2;1)$, $\vec{b} = (3;-5;6)$, $\vec{c} = (-4;3;-4)$, $\vec{d} = (-1;18;-16)$.
23. $\vec{a} = (-2;5;1)$, $\vec{b} = (3;2;-7)$, $\vec{c} = (4;-3;2)$, $\vec{d} = (-4;22;-13)$.
24. $\vec{a} = (1;2;5)$, $\vec{b} = (-5;3;-1)$, $\vec{c} = (-6;4;5)$, $\vec{d} = (-4;11;20)$.
25. $\vec{a} = (3;1;2)$, $\vec{b} = (-4;3;-1)$, $\vec{c} = (2;3;4)$, $\vec{d} = (14;14;20)$.
26. $\vec{a} = (3;-1;2)$, $\vec{b} = (-2;4;1)$, $\vec{c} = (4;-5;-1)$, $\vec{d} = (-5;11;1)$.
27. $\vec{a} = (4;5;1)$, $\vec{b} = (1;3;1)$, $\vec{c} = (-3;-6;7)$, $\vec{d} = (19;33;0)$.
28. $\vec{a} = (1;-3;1)$, $\vec{b} = (-2;-4;3)$, $\vec{c} = (0;-2;3)$, $\vec{d} = (-8;-10;13)$.
29. $\vec{a} = (5;7;-2)$, $\vec{b} = (-3;1;3)$, $\vec{c} = (1;-4;6)$, $\vec{d} = (14;9;-1)$.
30. $\vec{a} = (-1;4;3)$, $\vec{b} = (3;2;-4)$, $\vec{c} = (-2;-7;1)$, $\vec{d} = (6;20;-3)$.

Задача 8.7. *Задано вершини трикутника ABC. Знайдіть:*

1) *рівняння сторони AB;*
2) *рівняння висоти CK і її довжину;*
3) *рівняння медіани BM;*
4) *рівняння бісектриси кута C;*
5) *точку перетину медіани і висоти;*
6) *рівняння прямої, яка проходить через точку A паралельно до сторони BC;*
7) *площу трикутника ABC;*
8) *косинус кута при вершині B;*
8) *кутові коефіцієнти прямих AB, BC, CK;*
9) *запишіть нормовані рівняння цих прямих і рівняння у відрізках на осях.*

Результати проілюструйте графічно.

1. $A(1;-6)$, $B(3;4)$, $C(-3;3)$.
2. $A(-4;2)$, $B(8;-6)$, $C(2;6)$.
3. $A(-5;-2)$, $B(0;-4)$, $C(5;7)$.
4. $A(4;-4)$, $B(6;2)$, $C(-3;3)$.
5. $A(-3;6)$, $B(-6;4)$, $C(0;-3)$.
6. $A(6;-6), B(3;4), C(-3;3)$.
7. $A(4;1), B(-3;-4), C(7;-2)$.
8. $A(-4;2), B(6;-4), C(4;9)$.
9. $A(3;-6), B(5;4), C(-3;3)$.
10. $A(-1;-6), B(3;4), C(-3;7)$.
11. $A(-1;-4), B(9;6), C(-5;4)$.
12. $A(10;-2), B(4;-4), C(-3;5)$.
13. $A(-1;-6), B(7;4), C(-6;3)$.
14. $A(-2;-6), B(-3;4), C(7;1)$.
15. $A(-5;-6), B(3;-9), C(-3;8)$.
16. $A(1;-6), B(-3;4), C(-3;3)$.
17. $A(1;2), B(3;7), C(-3;3)$.
18. $A(1;-4), B(0;4), C(-3;9)$.

19. $A(-4;-6), B(7;4), C(-2;3)$.
20. $A(1;6), B(-3;4), C(-7;-3)$.
21. $A(-4;-6), B(5;6), C(-3;3)$.
22. $A(-5;-6), B(3;9), C(-2;2)$.
23. $A(1;8), B(-3;-4), C(8;3)$.
24. $A(2;-6), B(-3;7), C(5;3)$.
25. $A(1;-7), B(5;4), C(-3;3)$.
26. $A(-1;-6), B(2;4), C(6;3)$.
27. $A(-5;-6), B(6;4), C(3;3)$.
28. $A(7;-6), B(1;4), C(-3;9)$.
29. $A(-6;-6), B(5;4), C(1;3)$.
30. $A(-4;-6), B(3;8), C(7;3)$.

Задача 8.8. *Розв'яжіть задачі.*

1. Задано координати двох вершин трикутника ABC : $A(-4;4)$, $B(4;-12)$ і точка $M(4;2)$ перетину його висот. Визначте координати вершини C.
2. У трикутнику ABC відомі рівняння сторони $AB : 4x + y = 12$ і висот $BH : 5x - 4y = 12$, $AM : x + y = 6$. Визначте рівняння двох інших сторін.
3. Задано дві вершини трикутника $ABC : A(-6;2)$, $B(2;-2)$ і точка перетину його висот $H(1;2)$. Визначте координати точки перетину сторони AC і висоти BH.
4. Складіть рівняння висоти, проведеної через вершину A трикутника ABC, якщо відомі рівняння його сторін $AB : 2x - y - 3 = 0$, $AC : x + 5y - 7 = 0$, $BC : 3x - y + 13 = 0$.
5. Відомі рівняння двох сторін ромба $2x - 5y - 1 = 0$, $2x - 5y - 34 = 0$ і рівняння його діагоналі $x + 3y - 6 = 0$. Знайдіть рівняння другої діагоналі.
6. Задано рівняння висот трикутника $ABC : 2x-3y+1 = 0, x+2y+1 = 0$ і координати його вершини $A(2;3)$. Визначте рівняння сторін AB і AC.
7. Задано рівняння двох сторін паралелограма $x - 2y = 0$, $x - y - 1 = 0$ і точка перетину його діагоналей $M(3;-1)$. Визначте рівняння двох інших сторін.
8. Знайдіть координати вершин трикутника, якщо $M(0;3)$ — точка перетину його медіан, $x + 2y - 12 = 0$ і $4x - y + 15 = 0$ — рівняння двох сторін.
9. Знайдіть координати вершин трикутника, якщо $3x - 4y - 3 = 0$, $3x + y + 12 = 0$ — рівняння його сторін, а $2x - y - 2 = 0$ — рівняння однієї з медіан.
10. Знайдіть рівняння сторони BC, якщо $A(5;-1)$ одна з вершин, а $8x-y-21 = 0$, $3x-y-6 = 0$ рівняння відповідно висоти і бісектриси, проведених з однієї вершини.
11. Знайдіть рівняння сторони BC, якщо $A(1;1)$ одна з вершин, $2x - y - 7 = 0$, $5x + y - 16 = 0$ рівняння, відповідно, бісектриси і медіани проведених з різних вершин.

12. Знайдіть рівняння сторони BC, якщо $A(4;2)$ одна з вершин, $3x + y - 4 = 0$ і $5x + y - 10 = 0$ рівняння, відповідно, бісектриси і медіани, проведених з однієї вершини.
13. Знайдіть рівняння висоти BD, якщо $A(5;4)$ одна з вершин, $y - 7 = 0$, $2x - y - 1 = 0$ рівняння двох бісектрис.
14. Із початку координат проведено дві взаємно перпендикулярні прямі, які утворюють з прямою $2x + y = 0$ рівнобедрений трикутник. Знайдіть його площу.
15. Визначте внутрішні кути трикутника, якщо відомі рівняння його сторін $AB : x - 3y + 3 = 0$, $AC : x + 3y + 3 = 0$ і точка $D(-1;3)$ — основа висоти AD.
16. Задано рівняння бічних сторін рівнобедреного трикутника $3x + y = 0$, $x - 3y = 0$ і точка $D(5;0)$ на його основі. Визначте рівняння третьої сторони.
17. У трикутнику ABC задано: рівняння сторони $AB : 3x + 2y - 12 = 0$, висоти $BM : x + 2y - 4 = 0$, висоти $AM : 4x + y - 6 = 0$, де M — точка перетину висот. Визначте рівняння сторін AC, BC і висоти CM.
18. Дві сторони паралелограма задано рівняннями $y - x + 2 = 0$, $x - 5y + 6 = 0$, а діагоналі перетинаються у початку координат. Запишіть рівняння його діагоналей.
19. Знайдіть вершини прямокутного рівнобедреного трикутника, якщо відома вершина прямого кута $C(3;-1)$ і рівняння гіпотенузи $3x - y + 2 = 0$.
20. Задано дві вершини трикутника $A(-4;3)$, $B(4;-1)$ і точка перетину висот $M(3;3)$. Визначте третю вершину.
21. Визначте координати вершин ромба, якщо відомі рівняння двох його сторін: $x + 2y - 4 = 0$, $x + 2y - 10 = 0$ і рівняння його діагоналі $y = x + 2$.
22. Визначте рівняння сторін трикутника, якщо відомі його вершина $A(0;2)$ і рівняння висот $BM : x + y - 4 = 0$, $CM : y = 2x$, де M — точка перетину висот.
23. Точка $H(-3;2)$ є точкою перетину висот трикутника, а дві сторони задано рівняннями $2x - y - 2 = 0$ і $2x + y + 2 = 0$. Складіть рівняння висоти, опущеної на третю сторону.
24. Складіть рівняння сторін трикутника, знаючи координати вершини $A(2;-4)$ і рівняння двох висот $7x - 2y - 1 = 0$, $2x - 7y - 6 = 0$.
25. Складіть рівняння сторін трикутника, знаючи координати вершини $A(2;-4)$ і рівняння бісектрис $x + y - 2 = 0$, $x - 3y - 6 = 0$.

26. Складіть рівняння сторін трикутника, знаючи координати вершини $A(-4;2)$ та рівняння медіан $3x - 2y + 12 = 0$, $3x + 5y - 12 = 0$.
27. Складіть рівняння катетів прямокутного трикутника, якщо $C(5;-1)$ — вершина прямого кута, а $2x - 3y + 5 = 0$ — рівняння гіпотенузи.
28. Точка $H(-3;2)$ є точкою перетину висот трикутника, а дві сторони лежать на прямих $y = 2x$, $y = -x + 3$. Складіть рівняння третьої сторони.
29. Запишіть рівняння сторін трикутника, знаючи його вершину $B(2;6)$ і рівняння висоти $x - 7y + 15 = 0$ та бісектриси $7x + y + 5 = 0$ проведених з однієї вершини.
30. Запишіть рівняння сторін трикутника, знаючи його вершину $A(3;-1)$ і рівняння бісектриси $x - 4y + 10 = 0$ та медіани $6x + 10y - 59 = 0$ проведених із різних вершин.

Задача 8.9. *Задано координати вершин піраміди $ABCD$. Знайдіть:*

1) *об'єм піраміди;*
2) *висоту піраміди, проведену з вершини D на грань ABC;*
3) *проекцію вектора $\vec{AC}$ на вектор $\vec{AD}$.*

1. $A(1;2;3)$, $B(-2;4;1)$, $C(7;6;3)$, $D(4;-3;-1)$.
2. $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(3;7;-3)$.
3. $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$, $D(4;1;3)$.
4. $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$.
5. $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$, $D(0;8;0)$.
6. $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;3;4)$.
7. $A(2;2;2)$, $B(4;3;3)$, $C(4;5;4)$, $D(5;5;6)$.
8. $A(0;0;1)$, $B(2;3;5)$, $C(6;2;3)$, $D(3;7;2)$.
9. $A(-3;0;-6)$, $B(-1;3;-2)$, $C(-3;-2;-5)$, $D(2;2;5)$.
10. $A(1;-1;6)$, $B(-5;-1;0)$, $C(4;0;0)$, $D(2;2;5)$.
11. $A(-2;0;2)$, $B(1;0;4)$, $C(3;2;5)$, $D(1;3;2)$.
12. $A(1;2;3)$, $B(2;0;0)$, $C(3;1;5)$, $D(4;1;2)$.
13. $A(-2;0;-1)$, $B(0;0;4)$, $C(1;3;2)$, $D(3;2;7)$.
14. $A(1;-2;1)$, $B(0;0;4)$, $C(1;4;2)$, $D(2;0;0)$.
15. $A(-2;0;0)$, $B(2;0;1)$, $C(-1;-4;-2)$, $D(-3;0;-6)$.
16. $A(2;0;-2)$, $B(0;0;-4)$, $C(-3;-2;-5)$, $D(-1;-3;2)$.
17. $A(-1;-2;-3)$, $B(2;0;0)$, $C(-3;-2;-5)$, $D(4;0;0)$.
18. $A(2;0;1)$, $B(0;0;-4)$, $C(-1;-3;-2)$, $D(3;-2;-7)$.
19. $A(2;-1;0)$, $B(-3;-2;-7)$, $C(-2;-2;-5)$, $D(-6;-1;-5)$.
20. $A(-1;-3;0)$, $B(-2;0;0)$, $C(-4;1;-2)$, $D(-3;-2;-7)$.
21. $A(-6;-1;-5)$, $B(-5;-1;0)$, $C(4;-1;2)$, $D(6;0;-5)$.
22. $A(-1;1;-6)$, $B(5;1;0)$, $C(-4;0;0)$, $D(-2;-2;-5)$.

23. $A(-2;1;-1)$, $B(-5;-5;-4)$, $C(-3;-2;1)$, $D(-4;-1;3)$.
24. $A(-2;-1;1)$, $B(-3;0;-1)$, $C(-2;1;-3)$, $D(0;7;0)$.
25. $A(-3;2;1)$, $B(6;-4;0)$, $C(-6;2;2)$, $D(1;-1;1)$.
26. $A(1;1;3)$, $B(2;0;6)$, $C(0;2;0)$, $D(1;1;1)$.
27. $A(0;2;2)$, $B(-1;1;0)$, $C(1;6;1)$, $D(5;2;1)$.
28. $A(2;1;3)$, $B(1;-1;-1)$, $C(-1;0;1)$, $D(5;2;3)$.
29. $A(2;-3;1)$, $B(-2;3;-1)$, $C(0;0;5)$, $D(1;1;1)$.
30. $A(1;3;6)$, $B(2;2;1)$, $C(-1;0;1)$, $D(-4;6;-3)$.

Задача 8.10. *Задано рівняння площини π_1, прямої l_1 і точку $M(x;y;z)$. Знайдіть:*

1) *рівняння площини π_2, що проходить через точку M паралельно до площини π_1;*
2) *рівняння площини π_3, що проходить через точку M перпендикулярно до прямої l_1;*
3) *рівняння прямої l_2, що проходить через точку M перпендикулярно до площини π_1;*
4) *рівняння прямої l_3, що проходить через точку M паралельно до прямої l_1;*
5) *точку A перетину прямої l_1 і площини π_1;*
6) *відстань від точки M до площини π_1;*
7) *відстань від точки M до прямої l_1.*

1. $\pi_1 : 2x - 3y + z - 4 = 0,\ l_1 : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{5} = \dfrac{z-6}{1},\ M(-1;0;4).$
2. $\pi_1 : 3x - 5y + z - 7 = 0,\ l_1 : \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z+6}{1},\ M(-1;4;7).$
3. $\pi_1 : x - 5y + 3z - 2 = 0,\ l_1 : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z+5}{1},\ M(-3;0;2).$
4. $\pi_1 : 7x - 5y + z - 3 = 0,\ l_1 : \dfrac{x-31}{2} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z-4}{1},\ M(-2;1;2).$
5. $\pi_1 : 4x - 3y + z - 3 = 0,\ l_1 : \dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z-1}{1},\ M(-5;2;2).$
6. $\pi_1 : 7x - 2y + 3z - 4 = 0,\ l_1 : \dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z-1}{5},\ M(-4;3;8).$
7. $\pi_1 : 7x - 6y + 5z - 1 = 0,\ l_1 : \dfrac{x+5}{2} = \dfrac{y-4}{5} = \dfrac{z-1}{5},\ M(4;-3;-8).$
8. $\pi_1 : 2x - 6y + 5z - 5 = 0,\ l_1 : \dfrac{x+6}{3} = \dfrac{y-8}{5} = \dfrac{z-4}{5},\ M(-1;-3;8).$
9. $\pi_1 : 2x - 7y + 5z - 5 = 0,\ l_1 : \dfrac{x-6}{3} = \dfrac{y+8}{7} = \dfrac{z-4}{5},\ M(-1;3;-5).$
10. $\pi_1 : 3x - 7y + 5z - 9 = 0,\ l_1 : \dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y+8}{7} = \dfrac{z+4}{5},\ M(1;-3;-5).$
11. $\pi_1 : 5x - 7y + 3z - 9 = 0,\ l_1 : \dfrac{x+7}{1} = \dfrac{y+8}{7} = \dfrac{z+4}{5},\ M(2;-3;5).$
12. $\pi_1 : 5x - 9y + 2z - 9 = 0,\ l_1 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+8}{3} = \dfrac{z+4}{5},\ M(-2;3;5).$

13. $\pi_1 : 3x - 9y + 7z - 9 = 0,\ l_1 : \dfrac{x+1}{9} = \dfrac{y+8}{3} = \dfrac{z+4}{5},\ M(-2;-3;9).$
14. $\pi_1 : 3x - 8y + 7z - 9 = 0,\ l_1 : \dfrac{x-1}{6} = \dfrac{y+8}{3} = \dfrac{z+4}{4},\ M(-8;-3;9).$
15. $\pi_1 : 4x - 8y + 3z - 9 = 0,\ l_1 : \dfrac{x-1}{7} = \dfrac{y+8}{5} = \dfrac{z+4}{4},\ M(-8;-5;9).$
16. $\pi_1 : 2x - 3y + z - 4 = 0,\ l_1 : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+2}{7} = \dfrac{z-6}{1},\ M(-1;3;-4).$
17. $\pi_1 : 3x + 5y - z - 7 = 0,\ l_1 : \dfrac{x-2}{7} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z+6}{2},\ M(-1;4;-7).$
18. $\pi_1 : x + 5y - 3z - 2 = 0,\ l_1 : \dfrac{x+1}{6} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z+5}{4},\ M(3;8;2).$
19. $\pi_1 : x - 5y - 4z - 3 = 0,\ l_1 : \dfrac{x-3}{7} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z-4}{5},\ M(-2;1;2).$
20. $\pi_1 : 4x + 3y - 5z - 3 = 0,\ l_1 : \dfrac{x-5}{8} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z-1}{2},\ M(-5;2;-2).$
21. $\pi_1 : 7x + 2y - 3z - 4 = 0,\ l_1 : \dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y-4}{9} = \dfrac{z-1}{5},\ M(-4;3;8).$
22. $\pi_1 : 7x + 6y - 5z - 1 = 0,\ l_1 : \dfrac{x+5}{3} = \dfrac{y-4}{5} = \dfrac{z-1}{2},\ M(4;-3;-8).$
23. $\pi_1 : 2x + 6y - 5z + 5 = 0,\ l_1 : \dfrac{x-6}{4} = \dfrac{y-8}{3} = \dfrac{z-4}{5},\ M(-1;-3;8).$
24. $\pi_1 : 2x + 7y - 5z - 15 = 0,\ l_1 : \dfrac{x-6}{9} = \dfrac{y+8}{7} = \dfrac{z-4}{8},\ M(-1;3;-5).$
25. $\pi_1 : 3x - 7y - 6z - 9 = 0,\ l_1 : \dfrac{x-7}{8} = \dfrac{y+8}{7} = \dfrac{z+4}{3},\ M(1;-3;-5).$
26. $\pi_1 : 5x - 8y + 3z - 9 = 0,\ l_1 : \dfrac{x-7}{4} = \dfrac{y+8}{7} = \dfrac{z+4}{5},\ M(2;-3;5).$
27. $\pi_1 : 5x - 4y + 2z - 9 = 0,\ l_1 : \dfrac{x-1}{10} = \dfrac{y+8}{7} = \dfrac{z+4}{5},\ M(-2;3;5).$
28. $\pi_1 : 3x - 5y + 7z - 9 = 0,\ l_1 : \dfrac{x+1}{7} = \dfrac{y+8}{2} = \dfrac{z+4}{5},\ M(-2;-3;9).$
29. $\pi_1 : 3x - 6y + 2z - 9 = 0,\ l_1 : \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+8}{3} = \dfrac{z+4}{7},\ M(-8;-3;9).$
30. $\pi_1 : 4x - 5y + 3z - 7 = 0,\ l_1 : \dfrac{x-1}{8} = \dfrac{y+8}{5} = \dfrac{z+4}{7},\ M(-8;-5;9).$

Задача 8.11. *Знайдіть проекцію точки P на пряму l.*

1. $P(0;-3;-2)$, $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1,5}{-1} = \dfrac{z}{1}.$
2. $P(2;-1;1)$, $\dfrac{x-4,5}{1} = \dfrac{y+3}{-0,5} = \dfrac{z-2}{1}.$
3. $P(1;1;1)$, $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1,5}{-2} = \dfrac{z-1}{1}.$
4. $P(1;2;3)$, $\dfrac{x-0,5}{0} = \dfrac{y+1,5}{-1} = \dfrac{z-1,5}{1}.$
5. $P(1;0;-1)$, $\dfrac{x-3,5}{2} = \dfrac{y-1,5}{2} = \dfrac{z}{0}.$

6. $P(2;1;0)$, $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y+1,5}{-1}=\dfrac{z+0,5}{1}$.
7. $P(-2;-3;0)$, $\dfrac{x+0,5}{1}=\dfrac{y+1,5}{0}=\dfrac{z-0,5}{1}$.
8. $P(-1;0;-1)$, $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1,5}{0}=\dfrac{z-2}{1}$.
9. $P(0;2;1)$, $\dfrac{x-1,5}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$.
10. $P(3;-3;-1)$, $\dfrac{x-6}{5}=\dfrac{y-3,5}{4}=\dfrac{z+0,5}{0}$.
11. $P(1;-1;2)$, $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-8}{-2}$.
12. $P(2;-3;1)$, $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+4}{-3}$.
13. $P(-1;0;3)$, $\dfrac{x+4}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{4}$.
14. $P(-3;1;0)$, $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{2}$.
15. $P(-2;0;4)$, $\dfrac{x+5}{-1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-2}{-3}$.
16. $P(-3;2;1)$, $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-5}{-1}$.
17. $P(5;1;2)$, $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{2}$.
18. $P(0;1;-3)$, $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-1}{4}$.
19. $P(4;1;0)$, $\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-6}{-1}$.
20. $P(2;-1;1)$, $\dfrac{x+7}{-2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{5}$.
21. $P(-3;4;-1)$, $\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-9}{4}$.
22. $P(1;0;5)$, $\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-6}{2}=\dfrac{z+1}{-3}$.
23. $P(4;5;1)$, $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-1}{-1}$.
24. $P(1;1;1)$, $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+1}{3}$.
25. $P(-1;2;0)$, $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$.
26. $P(1;2;4)$, $\dfrac{x}{-3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$.
27. $P(2;1;-3)$, $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$.
28. $P(1;1;2)$, $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{0}$.
29. $P(1;-3;1)$, $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$.
30. $P(-1;0;-4)$, $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+2}{-1}$.

Задача 8.12. *Зведіть рівняння прямої до канонічного вигляду.*

1. $\begin{cases} 2x-3y+2z-5=0 \\ 3x+4y-z-2=0 \end{cases}$.
2. $\begin{cases} 2x-5y+2z-5=0 \\ 7x+4y-z-8=0 \end{cases}$.
3. $\begin{cases} 2x-7y+2z-5=0 \\ 3x+10y-z-2=0 \end{cases}$.
4. $\begin{cases} 12x-3y+2z-5=0 \\ 5x+4y-z-2=0 \end{cases}$.
5. $\begin{cases} 7x-3y+2z-5=0 \\ 2x+4y-z-2=0 \end{cases}$.
6. $\begin{cases} 2x+3y+2z-5=0 \\ 8x+5y-3z-2=0 \end{cases}$.
7. $\begin{cases} 2x+3y+9z-5=0 \\ 3x-4y-6z-2=0 \end{cases}$.
8. $\begin{cases} 2x-13y+2z-5=0 \\ 3x+14y-z-2=0 \end{cases}$.
9. $\begin{cases} 2x-3y+2z-5=0 \\ 3x-24y-3z-2=0 \end{cases}$.
10. $\begin{cases} 2x-3y+22z-5=0 \\ 7x+4y-z-2=0 \end{cases}$.
11. $\begin{cases} 4x-13y+2z-5=0 \\ 7x+4y-2z-2=0 \end{cases}$.
12. $\begin{cases} 9x-3y+4z-5=0 \\ 3x+7y-9z-2=0 \end{cases}$.
13. $\begin{cases} 21x-8y+2z-5=0 \\ 30x+4y-z-2=0 \end{cases}$.
14. $\begin{cases} 7x-3y+9z-5=0 \\ 11x+9y-z-2=0 \end{cases}$.
15. $\begin{cases} 2x-3y+2z-15=0 \\ 8x+4y-7z-2=0 \end{cases}$.
16. $\begin{cases} 5x-3y+2z-5=0 \\ 3x+y-4z-2=0 \end{cases}$.
17. $\begin{cases} 7x-3y+2z-2=0 \\ 3x+9y-z-2=0 \end{cases}$.
18. $\begin{cases} 4x-3y+9z-5=0 \\ 3x+8y-5z-2=0 \end{cases}$.
19. $\begin{cases} 2x-8y+z-15=0 \\ 3x+9y-2z-2=0 \end{cases}$.
20. $\begin{cases} 5x-3y+2z-5=0 \\ -3x+4y-z-2=0 \end{cases}$.
21. $\begin{cases} 8x-3y+2z-5=0 \\ 9x+4y-z-2=0 \end{cases}$.
22. $\begin{cases} 6x-3y+2z-5=0 \\ 10x+4y-z-2=0 \end{cases}$.
23. $\begin{cases} 8x-3y+12z-5=0 \\ 3x+7y-9z-2=0 \end{cases}$.
24. $\begin{cases} 22x-3y+2z-4=0 \\ 13x+4y-z-2=0 \end{cases}$.
25. $\begin{cases} 2x-5y+2z-9=0 \\ 3x+4y-7z-12=0 \end{cases}$.
26. $\begin{cases} 2x-23y+8z-5=0 \\ 9x-4y-z-2=0 \end{cases}$.
27. $\begin{cases} 7x-3y+7z-5=0 \\ 8x+4y-9z-2=0 \end{cases}$.
28. $\begin{cases} 2x-3y+22z-5=0 \\ 13x+4y-5z-2=0 \end{cases}$.
29. $\begin{cases} 4x-30y+2z-5=0 \\ 3x+9y-z-2=0 \end{cases}$.
30. $\begin{cases} 9x-8y+2z-5=0 \\ 3x-4y-5z-2=0 \end{cases}$.

Задача 8.13. *Задано чотири точки* $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$, $A_3(x_3;y_3;z_3)$, $A_4(x_4;y_4;z_4)$. *Складіть рівняння:*

1) *площини* $A_1A_2A_3$;
2) *прямої* A_1A_2;
3) *прямої, яка проходить через точку* A_4, *перпендикулярно до площини* $A_1A_2A_3$;

4) *прямої, яка проходить через точку* A_3, *паралельно до прямої, яка проходить через точки* A_1 *і* A_4;

5) *площини, що проходить через точку* A_4, *перпендикулярно до прямої* A_1A_2.

Обчисліть:

1) *кут між прямою* A_1A_4 *і площиною* $A_1A_2A_3$;

2) *кут між площинами* $A_1A_2A_3$ *і* $A_1A_4A_3$;

3) *об'єм піраміди* $A_1A_2A_3A_4$;

4) *площу грані* $A_1A_2A_3$.

1. $A_1(-3;5;8)$, $A_2(6;-8;2)$, $A_3(1;9;-7)$, $A_4(5;-6;3)$.
2. $A_1(-3;-5;8)$, $A_2(-6;-8;2)$, $A_3(5;9;-7)$, $A_4(3;-6;3)$.
3. $A_1(-3;5;-8)$, $A_2(2;-8;2)$, $A_3(1;7;-7)$, $A_4(5;-6;8)$.
4. $A_1(-4;5;8)$, $A_2(3;-8;2)$, $A_3(5;9;-7)$, $A_4(5;-6;3)$.
5. $A_1(-3;6;8)$, $A_2(4;-8;2)$, $A_3(1;5;-7)$, $A_4(2;-6;6)$.
6. $A_1(3;5;8)$, $A_2(6;-8;4)$, $A_3(8;9;-7)$, $A_4(5;-7;3)$.
7. $A_1(-3;-5;-8)$, $A_2(-6;-8;2)$, $A_3(-1;9;-7)$, $A_4(-5;-6;3)$.
8. $A_1(4;5;3)$, $A_2(4;-8;2)$, $A_3(6;9;-7)$, $A_4(1;-6;3)$.
9. $A_1(1;5;8)$, $A_2(-5;-8;2)$, $A_3(1;9;-7)$, $A_4(5;-6;3)$.
10. $A_1(-3;-5;8)$, $A_2(6;-8;2)$, $A_3(1;4;-7)$, $A_4(9;-6;3)$.
11. $A_1(-7;5;8)$, $A_2(6;-8;3)$, $A_3(5;9;-7)$, $A_4(8;-6;3)$.
12. $A_1(-4;5;3)$, $A_2(4;-8;-2)$, $A_3(-6;9;-7)$, $A_4(-1;-6;3)$.
13. $A_1(4;-5;3)$, $A_2(4;8;2)$, $A_3(6;-9;-7)$, $A_4(1;-6;-3)$.
14. $A_1(1;5;3)$, $A_2(7;-8;2)$, $A_3(5;9;-7)$, $A_4(4;-6;3)$.
15. $A_1(4;5;9)$, $A_2(4;-8;5)$, $A_3(6;9;-2)$, $A_4(1;-6;-5)$.
16. $A_1(4;-7;3)$, $A_2(3;-8;2)$, $A_3(-7;9;-7)$, $A_4(6;-6;3)$.
17. $A_1(-6;5;3)$, $A_2(4;-8;7)$, $A_3(6;8;-7)$, $A_4(1;-5;3)$.
18. $A_1(-5;5;3)$, $A_2(-4;-8;2)$, $A_3(-6;9;-7)$, $A_4(-1;6;-3)$.
19. $A_1(4;5;-3)$, $A_2(4;-8;-2)$, $A_3(6;-3;7)$, $A_4(1;-6;9)$.
20. $A_1(6;-5;3)$, $A_2(7;-8;2)$, $A_3(-5;9;-7)$, $A_4(9;-6;3)$.
21. $A_1(-4;5;-3)$, $A_2(-4;-8;3)$, $A_3(6;-8;7)$, $A_4(1;-6;-3)$.
22. $A_1(8;-5;3)$, $A_2(4;-6;2)$, $A_3(-6;9;-3)$, $A_4(7;-6;3)$.
23. $A_1(4;5;-3)$, $A_2(-7;-8;2)$, $A_3(-3;9;-7)$, $A_4(8;-6;-3)$.
24. $A_1(7;-5;3)$, $A_2(4;8;-2)$, $A_3(6;-9;-7)$, $A_4(1;-6;8)$.
25. $A_1(4;5;-6)$, $A_2(4;-8;9)$, $A_3(6;5;-9)$, $A_4(1;-6;3)$.
26. $A_1(5;-5;-3)$, $A_2(2;-8;2)$, $A_3(6;9;-5)$, $A_4(7;-6;3)$.
27. $A_1(9;5;3)$, $A_2(-9;-8;2)$, $A_3(4;9;-7)$, $A_4(8;-6;3)$.
28. $A_1(4;8;-3)$, $A_2(2;-8;-2)$, $A_3(6;3;-7)$, $A_4(11;-6;-3)$.
29. $A_1(7;-5;3)$, $A_2(4;-11;2)$, $A_3(3;9;-7)$, $A_4(1;-10;7)$.
30. $A_1(9;5;6)$, $A_2(7;-8;12)$, $A_3(16;9;-7)$, $A_4(11;-6;13)$.

Задача 8.14. *Побудуйте лінії. Для еліпса знайдіть координати вершин, фокусів, рівняння директрис. Для гіперболи знайдіть координати вершин, фокусів, рівняння директрис, рівняння асимптот. Для параболи знайдіть координати фокуса і рівняння директриси.*

1. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1,\ \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1,\ y^2=8x.$
2. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1,\ \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1,\ x^2=5y.$
3. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{64}=1,\ \frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=1,\ y^2=3x.$
4. $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{16}=1,\ \frac{x^2}{225}-\frac{y^2}{16}=1,\ x^2=15y.$
5. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{64}=1,\ \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{36}=1,\ y^2=18x.$
6. $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}=1,\ \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1,\ x^2=7y.$
7. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1,\ \frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=1,\ y^2=10x.$
8. $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{25}=1,\ \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{256}=1,\ x^2=9y.$
9. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{49}=1,\ \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1\ y^2=6x.$
10. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,\ \frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{16}=1,\ x^2=21y.$
11. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{81}=1,\ \frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{16}=1,\ y^2=28x.$
12. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{81}=1,\ \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1,\ x^2=15y.$
13. $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{64}=1,\ \frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{156}=1,\ y^2=13x.$
14. $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{256}=1,\ \frac{x^2}{225}-\frac{y^2}{81}=1,\ x^2=13y.$
15. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1,\ \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1,\ y^2=11x.$
16. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{16}=1,\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1,\ x^2=25y.$
17. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{64}=1,\ \frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}=1,\ y^2=23x.$
18. $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{16}=1,\ \frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{16}=1,\ x^2=17y.$
19. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{64}=1,\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1,\ y^2=28x.$
20. $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=1,\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1,\ x^2=17y.$
21. $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{16}=1,\ \frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}=1,\ y^2=30x.$
22. $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1,\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{256}=1,\ x^2=19y.$
23. $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{49}=1,\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1,\ y^2=16x.$

24. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1,\ \frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{16}=1,\ x^2=31y.$
25. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{81}=1,\ \frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{16}=1,\ y^2=29x.$
26. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{81}=1,\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{144}=1,\ x^2=14y.$
27. $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{64}=1,\ \frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{156}=1,\ y^2=33x.$
28. $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{256}=1,\ \frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{81}=1,\ x^2=43y.$
29. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1,\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1,\ y^2=27x.$
30. $\frac{x^2}{289}-\frac{y^2}{16}=1,\ \frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{16}=1,\ x^2=37y.$

Задача 8.15. *Складіть канонічне рівняння параболи, в якої:*

1. Рівняння директриси $x=-6$.
2. Рівняння директриси $y=-4$.
3. Вісь симетрії Ox і $A(27;9)$.
4. Рівняння директриси $x=-8$.
5. Рівняння директриси $y=-6$.
6. Вісь симетрії Ox і $A(-7;-7)$.
7. Рівняння директриси $x=-5$.
8. Рівняння директриси $y=-3$.
9. Вісь симетрії Ox і $A(-7;5)$.
10. Рівняння директриси $x=-0,2$.
11. Рівняння директриси $y=-15$.
12. Вісь симетрії Oy і $A(4;1)$.
13. Рівняння директриси $x=-\frac{1}{8}$.
14. Рівняння директриси $y=25$.
15. Вісь симетрії Oy і $A(4;-10)$.
16. Рівняння директриси $x=5$.
17. Рівняння директриси $y=7$.
18. Вісь симетрії Ox і $A(4;-8)$.
19. Рівняння директриси $x=6$.
20. Рівняння директриси $y=6$.
21. Вісь симетрії Ox і $A(-5;15)$.
22. Рівняння директриси $x=8$.
23. Рівняння директриси $y=3$.
24. Вісь симетрії Oy і $A(-9;6)$.
25. Рівняння директриси $x=5$.
26. Рівняння директриси $y=15$.
27. Вісь симетрії Oy і $A(-2;3\sqrt{2})$.
28. Рівняння директриси $y=-17$.

29. Рівняння директриси $y=-25$.
30. Вісь симетрії Oy і $A(-45;15)$.

Задача 8.16. *Складіть канонічне рівняння гіперболи, довжина уявної півосі якої дорівнює b, а вершина ділить відстань між фокусами у відношенні $m:n$.*

1. $b=\sqrt{3},\ m=3,\ n=1.$
2. $b=\sqrt{3},\ m=2,\ n=1.$
3. $b=\sqrt{3},\ m=3,\ n=2.$
4. $b=2\sqrt{3},\ m=3,\ n=1.$
5. $b=2\sqrt{3},\ m=1,\ n=2.$
6. $b=2\sqrt{3},\ m=2,\ n=3.$
7. $b=2,\ m=3,\ n=1.$
8. $b=2,\ m=3,\ n=2.$
9. $b=2,\ m=2,\ n=1.$
10. $b=\sqrt{5},\ m=3,\ n=1.$
11. $b=\sqrt{5},\ m=3,\ n=2.$
12. $b=\sqrt{5},\ m=2,\ n=1.$
13. $b=\sqrt{2},\ m=3,\ n=1.$
14. $b=\sqrt{7},\ m=2,\ n=1.$
15. $b=3,\ m=3,\ n=1.$
16. $b=\sqrt{7},\ m=7,\ n=1.$
17. $b=\sqrt{12},\ m=3,\ n=1.$
18. $b=\sqrt{21},\ m=7,\ n=3.$
19. $b=4,\ m=4,\ n=1.$
20. $b=2\sqrt{6},\ m=3,\ n=2.$
21. $b=2\sqrt{5},\ m=5,\ n=1.$
22. $b=3\sqrt{3},\ m=3,\ n=1.$
23. $b=4\sqrt{2},\ m=2,\ n=1.$
24. $b=\sqrt{35},\ m=7,\ n=5.$
25. $b=2\sqrt{10},\ m=5,\ n=2.$
26. $b=\sqrt{15},\ m=5,\ n=3.$
27. $b=2\sqrt{3},\ m=3,\ n=1.$
28. $b=2\sqrt{6},\ m=8,\ n=3.$
29. $b=3,\ m=9,\ n=1.$
30. $b=3\sqrt{2},\ m=9,\ n=2.$

Задача 8.17. *Запишіть рівняння еліпса, якщо відомо його фокуси F_1, F_2 і одна з директрис d_1.*

1. $F_1(2;0),\ F_2(-4;0),\ d_1:\ x=8.$
2. $F_1(1;-1),\ F_2(5;-1),\ d_1:\ x=11.$
3. $F_1(1;1),\ F_2(-3;1),\ d_1:\ x=8.$
4. $F_1(1;-2),\ F_2(5;-2),\ d_1:\ x=-5.$
5. $F_1(3;2),\ F_2(-1;2),\ d_1:\ x=6.$
6. $F_1(-1;-2),\ F_2(3;-2),\ d_1:\ x=9.$
7. $F_1(4;-1),\ F_2(-2;-1),\ d_1:\ x=8.$
8. $F_1(-1;1),\ F_2(3;1),\ d_1:\ x=-7.$
9. $F_1(5;-2),\ F_2(-1;-2),\ d_1:\ x=7.$
10. $F_1(-3;2),\ F_2(1;2),\ d_1:\ x=7.$
11. $F_1(6;0),\ F_2(-2;0),\ d_1:\ x=8.$
12. $F_1(-1;1),\ F_2(5;1),\ d_1:\ x=\frac{31}{3}.$
13. $F_1(2;1),\ F_2(-4;1),\ d_1:\ x=7.$
14. $F_1(1;-1),\ F_2(7;-1),\ d_1:\ x=-\frac{13}{3}.$
15. $F_1(2;-1),\ F_2(-6;-1),\ d_1:\ x=6.$
16. $F_1(-3;-1),\ F_2(5;-1),\ d_1:\ x=10.$

17. $F_1(2;2)$, $F_2(-4;2)$, $d_1 : x = 5$.
18. $F_1(-5;2)$, $F_2(3;2)$, $d_1 : x = -10$.
19. $F_1(2;-2)$, $F_2(-6;-2)$, $d_1 : x = 4$.
20. $F_1(-2;1)$, $F_2(6;1)$, $d_1 : x = 11$.
21. $F_1(5;3)$, $F_2(-1;3)$, $d_1 : x = 8$.
22. $F_1(-1;3)$, $F_2(7;3)$, $d_1 : x = -6$.
23. $F_1(6;-3)$, $F_2(-4;-3)$, $d_1 : x = 6$.
24. $F_1(-7;-2)$, $F_2(1;-2)$, $d_1 : x = 6$.
25. $F_1(2;-1)$, $F_2(-4;-1)$, $d_1 : x = 8$.
26. $F_1(2;1)$, $F_2(4;1)$, $d_1 : x = 7$.
27. $F_1(3;0)$, $F_2(-5;0)$, $d_1 : x = 10$.
28. $F_1(3;-1)$, $F_2(5;-1)$, $d_1 : x = 0$.
29. $F_1(-2;2)$, $F_2(0;2)$, $d_1 : x = 3$.
30. $F_1(4;1)$, $F_2(-2;1)$, $d_1 : x = 8$.

Задача 8.18. *Запишіть рівняння заданої лінії другого порядку в полярній системі координат.*

1. $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$.
2. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$.
3. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.
4. $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{3} = 1$.
5. $y^2 = 6x$.
6. $y^2 = 14x$.
7. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$.
8. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.
9. $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$.
10. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{3} = 1$.
11. $y^2 = 10x$.
12. $y^2 = 16x$.
13. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$.
14. $\frac{x^2}{11} + \frac{y^2}{3} = 1$.
15. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$.
16. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$.
17. $y^2 = 18x$.
18. $y^2 = 2x$.
19. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$.
20. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$.
21. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$.
22. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} = 1$.
23. $y^2 = 8x$.
24. $y^2 = 20x$.
25. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$.
26. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.
27. $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.
28. $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{2} = 1$.
29. $y^2 = 4x$.
30. $y^2 = 12x$.

Задача 8.19. *Запишіть канонічні рівняння ліній другого порядку, які задано в полярній системі координат рівняннями.*

1. $\rho = \frac{7}{5 - 4\cos\varphi}$.
2. $\rho = \frac{7}{4 - 4\cos\varphi}$.
3. $\rho = \frac{10}{3 - 2\cos\varphi}$.
4. $\rho = \frac{8}{7 - 4\cos\varphi}$.
5. $\rho = \frac{14}{3 - 4\cos\varphi}$.
6. $\rho = \frac{6}{5 - 5\cos\varphi}$.
7. $\rho = \frac{7}{5 - 2\cos\varphi}$.
8. $\rho = \frac{5}{2 - 3\cos\varphi}$.
9. $\rho = \frac{21}{5 - 2\cos\varphi}$.
10. $\rho = \frac{7}{3 - 4\cos\varphi}$.
11. $\rho = \frac{4}{3 - 3\cos\varphi}$.
12. $\rho = \frac{8}{3 - \cos\varphi}$.
13. $\rho = \frac{9}{5 - 4\cos\varphi}$.
14. $\rho = \frac{18}{4 - 5\cos\varphi}$.
15. $\rho = \frac{3}{2 - 2\cos\varphi}$.
16. $\rho = \frac{16}{1 - 3\cos\varphi}$.
17. $\rho = \frac{32}{5 - 2\cos\varphi}$.
18. $\rho = \frac{9}{7 - 4\cos\varphi}$.
19. $\rho = \frac{1}{6 - 6\cos\varphi}$.
20. $\rho = \frac{15}{4 - \cos\varphi}$.
21. $\rho = \frac{16}{3 - 5\cos\varphi}$.
22. $\rho = \frac{7}{9 - 4\cos\varphi}$.
23. $\rho = \frac{8}{3 - 2\cos\varphi}$.
24. $\rho = \frac{5}{3 - 2\cos\varphi}$.
25. $\rho = \frac{6}{3 - 2\cos\varphi}$.
26. $\rho = \frac{10}{5 - 4\cos\varphi}$.
27. $\rho = \frac{10}{7 - 4\cos\varphi}$.
28. $\rho = \frac{7}{6 - 4\cos\varphi}$.
29. $\rho = \frac{4}{5 - 2\cos\varphi}$.
30. $\rho = \frac{5}{3 - 4\cos\varphi}$.

Задача 8.20. *Для заданих ліній другого порядку знайдіть канонічну систему координат і канонічне рівняння.*

1. а) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$;
   б) $x^2 + 2xy + y^2 - 2y - 5 = 0$;
   в) $3x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 1 = 0$.
2. а) $2x^2 - 12xy - 7y^2 + 4x + 8y + 8 = 0$;
   б) $x^2 + 2xy + y^2 + 4y + 1 = 0$;
   в) $2x^2 + xy - 3y^2 - x + y = 0$.

3. а) $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$;
б) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x + 16 = 0$;
в) $x^2 - 6xy + 8y^2 - 4y - 4 = 0$.
4. а) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 6x - 10y + 1 = 0$;
б) $4x^2 + 4xy + y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$;
в) $6x^2 + 7xy - 5y^2 + 7x + 3y + 2 = 0$.
5. а) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$;
б) $x^2 + 6xy + 9y^2 + 4x + 14y + 4 = 0$;
в) $3x^2 + 4xy + y^2 + 8x - 16 = 0$.
6. а) $11x^2 - 6xy + 19y^2 - 2x - 14y - 1 = 0$;
б) $9x^2 + 12xy + 4y^2 + 20x - 4y + 4 = 0$;
в) $2x^2 + 11xy + 5y^2 - x + 4y - 1 = 0$.
7. а) $8x^2 + 6xy - 26x - 12y + 11 = 0$;
б) $x^2 - 6xy + 9y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$;
в) $x^2 - 8xy + 15y^2 - 2y - 1 = 0$.
8. а) $2x^2 - 72xy + 23y^2 - 24x + 32y + 10 = 0$;
б) $x^2 + 2xy + y^2 + 8x - 4y - 17 = 0$;
в) $2x^2 + xy - 15y^2 + 9x - 17y + 4 = 0$.
9. а) $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$;
б) $x^2 + 2xy + y^2 + x - 2y - 8 = 0$;
в) $4xy + 4y^2 - 2x - 1 = 0$.
10. а) $19x^2 - 4xy + 16y^2 + 16x - 8y - 8 = 0$;
б) $4x^2 + 12xy + 9y^2 + 8x - 14y - 7 = 0$;
в) $2x^2 + 3xy - 3y - 2 = 0$.
11. а) $x^2 - 12xy - 4y^2 + 12x + 8y + 5 = 0$;
б) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 3x + 24 = 0$;
в) $8x^2 - 6xy + y^2 + 2x - 1 = 0$.
12. а) $23x^2 + 42xy - 33y^2 + 26x - 18y - 13 = 0$;
б) $25x^2 + 20xy + 4y^2 + 14x + 23y + 4 = 0$;
в) $3xy + 4y^2 - 6x - 7y - 2 = 0$.
13. а) $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 6x - 10y - 3 = 0$;
б) $x^2 + 6xy + 9y^2 + 7x + 12y + 4 = 0$;
в) $x^2 - 4xy + 3y^2 - 2y - 1 = 0$.
14. а) $2x^2 + 72xy + 23y^2 + 24x + 32y + 6 = 0$;
б) $16x^2 - 8xy + y^2 + 2x + 8y + 10 = 0$;
в) $-2x^2 + 5xy - x + 10y + 6 = 0$.
15. а) $12x^2 + 5xy - 12x - 22y - 19 = 0$;
б) $x^2 - 6xy + 9y^2 + 3x + 3y - 3 = 0$;
в) $4x^2 - 4xy - 2y - 1 = 0$.
16. а) $79x^2 + 40xy + 37y^2 + 12x - 30y + 6 = 0$;
б) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 16x - 8y - 32 = 0$;
в) $-2x^2 + 4xy - x + 2y = 0$.

17. а) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$;
б) $x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y - 14 = 0$;
в) $x^2 - 6xy + 8y^2 - 4y - 4 = 0$.
18. а) $-11x^2 + 16xy + y^2 + 4x + 8y + 1 = 0$;
б) $25x^2 + 20xy + 4y^2 + 6x - 15y - 6 = 0$;
в) $6xy + 3y^2 + 2x + 7y + 2 = 0$.
19. а) $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$;
б) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 5x + 40 = 0$;
в) $8x^2 + 6xy + y^2 - 2x - 1 = 0$.
20. а) $7x^2 - 2xy + 7y^2 + 40x + 8y + 52 = 0$;
б) $36x^2 - 60xy + 25y^2 - 15x - 18y - 6 = 0$;
в) $2x^2 - 9xy - 5y^2 + 3x - 4y + 1 = 0$.
21. а) $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$;
б) $x^2 + 6xy + 9y^2 + 9x + 12y + 4 = 0$;
в) $x^2 + xy + y - 1 = 0$.
22. а) $-x^2 - 10xy - y^2 + 44x - 20y + 110 = 0$;
б) $36x^2 + 12xy + y^2 + 2x - 12y + 8 = 0$;
в) $7x^2 - 14xy + 9x - 4y + 2 = 0$.
23. а) $11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0$;
б) $x^2 - 6xy + 9y^2 + 5x + 5y - 5 = 0$;
в) $xy + y^2 - x - 1 = 0$.
24. а) $-14x^2 + 36xy + y^2 + 4x + 6y - 1 = 0$;
б) $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 12x + 16y + 12 = 0$;
в) $6xy + 3y^2 + 4x - 13y - 10 = 0$.
25. а) $29x^2 - 24xy + 36y^2 + 82x - 96y - 91 = 0$;
б) $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$;
в) $x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y = 0$.
26. а) $6x^2 + 8xy + 6y^2 + 4x + 16y + 9 = 0$;
б) $9x^2 + 6xy + y^2 - 18x + 14y + 4 = 0$;
в) $6x^2 - 4xy + 23x - 14y + 7 = 0$.
27. а) $4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0$;
б) $x^2 - 4xy + 4y^2 + x + 8 = 0$;
в) $4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 4y = 0$.
28. а) $-x^2 + 6xy - y^2 + 12x - 4y - 6 = 0$;
б) $16x^2 - 8xy + y^2 + 18x - 12y + 4 = 0$;
в) $3xy + 3y^2 + 5x - 16y - 35 = 0$.
29. а) $5x^2 + 2xy + 5y^2 + 6x + 30y + 39 = 0$;
б) $25x^2 + 20xy + 4y^2 + 36x - 3y + 9 = 0$;
в) $12x^2 + 8xy + 17x - 2y - 5 = 0$.
30. а) $41x^2 + 24xy + 9y^2 + 24x + 18y - 36 = 0$;
б) $x^2 - 6xy + 9y^2 + x + y - 1 = 0$;
в) $x^2 - 4xy + 3y^2 + 2y - 1 = 0$.

Задача 8.21. *Знайдіть координати фокусів і рівняння директрис заданих ліній другого порядку.*

1. а) $41x^2 + 24xy + 9y^2 + 24x + 18y - 36 = 0$;
   б) $x^2 - y - x - 5 = 0$.
2. а) $-3x^2 + 2xy - 3y^2 + 12x - 4y - 4 = 0$;
   б) $y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.
3. а) $xy + x - y - 3 = 0$;
   б) $y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$.
4. а) $-3x^2 - 2xy - 3y^2 + 8y + 12 = 0$;
   б) $y^2 + 4y + 2x - 12 = 0$.
5. а) $4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0$;
   б) $x^2 - 2y - x - 1 = 0$.
6. а) $29x^2 - 24xy + 36y^2 + 82x - 96y - 91 = 0$;
   б) $x^2 - 2y - x - 5 = 0$.
7. а) $-2xy + 2x + 2y - 3 = 0$;
   б) $x^2 + 3y - 4x - 5 = 0$.
8. а) $-6x^2 - 2xy - 6y^2 + 38x + 18y - 31 = 0$;
   б) $2x^2 + 5y - 8x - 1 = 0$.
9. а) $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$;
   б) $x^2 + y - x - 1 = 0$.
10. а) $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$;
    б) $x^2 + 2y - x - 5 = 0$.
11. а) $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$;
    б) $4x^2 + 6y - 20x - 13 = 0$.
12. а) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$;
    б) $3y^2 - 6y + 2x + 5 = 0$.
13. а) $x^2 - xy - y^2 - x - y = 0$;
    б) $2y^2 + 8x + 12y - 3 = 0$.
14. а) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$;
    б) $x^2 - 3y - x - 3 = 0$.
15. а) $12x^2 + 5xy - 12x - 22y - 19 = 0$;
    б) $x^2 - 2y - x + 3 = 0$.
16. а) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$;
    б) $x^2 + y^2 - 6y - 4x = 0$.
17. а) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$;
    б) $x^2 + 4y^2 - 8y - 6x + 9 = 0$.
18. а) $9x^2 - 12xy + 4y^2 - 8x = 0$;
    б) $x^2 - y^2 - 2y - 2x - 2 = 0$.
19. а) $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 6x - 10y - 3 = 0$;
    б) $x^2 + 3y - x - 1 = 0$.
20. а) $x^2 - 12xy - 4y^2 + 12x + 8y + 5 = 0$;
    б) $x^2 - y - 2x - 3 = 0$.
21. а) $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$;
    б) $x^2 - 3y - 2x - 3 = 0$.
22. а) $11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0$;
    б) $x^2 - 3y + x - 1 = 0$.
23. а) $8x^2 + 6xy - 26x - 12y + 11 = 0$;
    б) $x^2 - y + x - 3 = 0$.

24. а) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$;
    б) $x^2 - 2y + x - 1 = 0$.
25. а) $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$;
    б) $x^2 + 3y + x - 3 = 0$.
26. а) $x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0$;
    б) $3y^2 - 18y + 5x - 4 = 0$.
27. а) $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 6x - 2y - 5 = 0$;
    б) $2y^2 - 8y + 14x - 5 = 0$.
28. а) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 6x - 8y + 2 = 0$;
    б) $5y^2 + 20y + 6x + 1 = 0$.
29. а) $2xy + 3x - y - 2 = 0$;
    б) $y^2 + 12y + 7x - 9 = 0$.
30. а) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$;
    б) $x^2 + 2y + x - 3 = 0$.

Задача 8.22. *Знайдіть діаметр заданої лінії другого порядку, який:*
а) перпендикулярний до прямої l;
б) паралельний до прямої l;
в) утворює з прямою l *кут* $45°$.

1. $2x^2 + 6xy - 5x + 1 = 0,\ l : x + 2y - 2 = 0.$
2. $x^2 - 3xy + 4y^2 - 5x + 6y + 2 = 0,\ l : 3x - y + 1 = 0.$
3. $2x^2 - 5xy + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0,\ l : 2x + 5y - 1 = 0.$
4. $3x^2 + 2xy - y^2 + 4x - 6y + 3 = 0,\ l : x - 6y + 1 = 0.$
5. $4x^2 - xy + y^2 - x + 2y + 7 = 0,\ l : 3x + 5y + 4 = 0.$
6. $x^2 - xy + 6x - 7y + 1 = 0,\ l : x + 5y - 4 = 0.$
7. $3x^2 - 6xy + 5x - 4y + 1 = 0,\ l : x + y - 8 = 0.$
8. $x^2 - 2xy + 4y^2 + 8x - 7 = 0,\ l : 2x - 3y + 1 = 0.$
9. $3x^2 - xy + 4y^2 - 7x + 5 = 0,\ l : 2x + 6y + 1 = 0.$
10. $6x^2 - 2xy + y^2 - 2x = 0,\ l : x - y + 3 = 0.$
11. $x^2 - 4xy + 2y^2 - 6x + 5 = 0,\ l : 2x + 4y - 1 = 0.$
12. $3x^2 + 2xy + 6x - 7 = 0,\ l : x - 3y + 4 = 0.$
13. $2x^2 - 6xy + 5y^2 - 4y + 1 = 0,\ l : 2x + 5y - 10 = 0.$
14. $x^2 - 3xy + 2y^2 - 6x - 10y = 0,\ l : x - 2y - 5 = 0.$
15. $x^2 - 4xy + 6x + 8y + 10 = 0,\ l : x - 4y - 6 = 0.$
16. $8x^2 + 4xy + 5y^2 - 16x - 4y - 28 = 0,\ l : x - y + 1 = 0.$
17. $8x^2 + 2xy + 5y^2 - 16x - 4y - 28 = 0,\ l : 2x + y = 0.$
18. $8x^2 + 4xy + 5y^2 - 15x - 4y - 28 = 0,\ l : x - 3y + 2 = 0.$
19. $7x^2 + 4xy + 5y^2 - 16x - 4y - 28 = 0,\ l : 2x + 3y = 0.$
20. $5x^2 + 4xy + 3y^2 - 16x - 3y - 28 = 0,\ l : x + y + 3 = 0.$
21. $6x^2 + 4xy + 5y^2 - 11x - 4y - 21 = 0,\ l : 2x + y = 0.$
22. $8x^2 + 3xy + 5y^2 - 16x - 4y - 10 = 0,\ l : x - y + 1 = 0.$
23. $7x^2 + 4xy + 5y^2 - 15x - 4y - 8 = 0,\ l : x - 3y + 2 = 0.$
24. $8x^2 + 7xy + 5y^2 - 16x - 5y - 2 = 0,\ l : 2x + 3y = 0.$
25. $x^2 + 4xy + 5y^2 - 16x - 5y - 28 = 0,\ l : x + y + 3 = 0.$
26. $3x^2 + 4xy - 12x + 16 = 0,\ l : 2x + y = 0.$

27. $x^2 + 5xy - 12x + 16 = 0,\ l : x - y + 1 = 0.$
28. $2x^2 + 4xy - 11x + 16 = 0,\ l : 2x + 3y = 0.$
29. $3x^2 + 7xy - 12x + 5 = 0,\ l : x + y + 3 = 0.$
30. $x^2 + 4xy - 9x + 1 = 0,\ l : 2x + y = 0.$

Задача 8.23. *Знайдіть спряжені діаметри заданої лінії другого порядку, якщо один з них проходить через точку* $A(1; -1)$.

1. $6x^2 + 4xy + 5y^2 - 11x - 4y - 21 = 0.$
2. $8x^2 + 3xy + 5y^2 - 16x - 4y - 10 = 0.$
3. $7x^2 + 4xy + 5y^2 - 15x - 4y - 8 = 0.$
4. $8x^2 + 7xy + 5y^2 - 16x - 5y - 2 = 0.$
5. $x^2 + 4xy + 5y^2 - 16x - 5y - 28 = 0.$
6. $3x^2 + 4xy - 12x + 16 = 0.$
7. $x^2 + 5xy - 12x + 16 = 0.$
8. $2x^2 + 4xy - 11x + 16 = 0.$
9. $3x^2 + 7xy - 12x + 5 = 0.$
10. $x^2 + 4xy - 9x + 1 = 0.$
11. $8x^2 + 4xy + 5y^2 - 16x - 4y - 28 = 0.$
12. $8x^2 + 2xy + 5y^2 - 16x - 4y - 28 = 0.$
13. $8x^2 + 4xy + 5y^2 - 15x - 4y - 28 = 0.$
14. $7x^2 + 4xy + 5y^2 - 16x - 4y - 28 = 0.$
15. $5x^2 + 4xy + 3y^2 - 16x - 3y - 28 = 0.$
16. $8x^2 + 4xy + 5y^2 - 16x - 4y - 28 = 0.$
17. $8x^2 + 2xy + 5y^2 - 16x - 4y - 28 = 0.$
18. $8x^2 + 4xy + 5y^2 - 15x - 4y - 28 = 0.$
19. $7x^2 + 4xy + 5y^2 - 16x - 4y - 28 = 0.$
20. $5x^2 + 4xy + 3y^2 - 16x - 3y - 28 = 0.$
21. $6x^2 + 4xy + 5y^2 - 11x - 4y - 21 = 0.$
22. $8x^2 + 3xy + 5y^2 - 16x - 4y - 10 = 0.$
23. $7x^2 + 4xy + 5y^2 - 15x - 4y - 8 = 0.$
24. $8x^2 + 7xy + 5y^2 - 16x - 5y - 2 = 0.$
25. $x^2 + 4xy + 5y^2 - 16x - 5y - 28 = 0.$
26. $3x^2 + 4xy - 12x + 16 = 0.$
27. $x^2 + 5xy - 12x + 16 = 0.$
28. $2x^2 + 4xy - 11x + 16 = 0.$
29. $3x^2 + 7xy - 12x + 5 = 0.$
30. $x^2 + 4xy - 9x + 1 = 0.$

Задача 8.24. *Знайдіть асимптоти гіперболи:*

1. $3x^2 - 6xy + 10x - 2y + 3 = 0.$
2. $x^2 + 3xy + 4y^2 - x - 2y + 10 = 0.$
3. $6xy + 2y^2 - 9x - 5y + 3 = 0.$

4. $2x^2 - xy - y^2 + 5x - 5y + 8 = 0.$
5. $2x^2 - xy - 3y^2 + 2x - 3y + 1 = 0.$
6. $-6x^2 + xy + y^2 - 2x + y + 6 = 0.$
7. $14x^2 + 21xy - 31x + 6y - 10 = 0.$
8. $5x^2 - xy - 4y^2 + 2x - 2y + 10 = 0.$
9. $7x^2 - 6xy + 8x - 4y + 3 = 0.$
10. $2x^2 - 9xy - 5y^2 + 8x + 4y - 5 = 0.$
11. $6xy + 2y^2 - 9x - 5y = 0.$
12. $3x^2 + 5xy + 2y^2 + 5x + 5y - 11 = 0.$
13. $3x^2 - xy - y^2 + x - 3y = 0.$
14. $4x^2 - 5xy + y^2 + 8x - 8y - 10 = 0.$
15. $x^2 - 4xy + 3y^2 + 5x - 15y = 0.$
16. $x^2 + 5xy + 6y^2 + y = 0.$
17. $2x^2 - 10xy + 3x - 5y + 1 = 0.$
18. $2x^2 - 5xy - 3y^2 + 4x - 5y - 1 = 0.$
19. $2xy - 4y^2 - 7x + 20y - 21 = 0.$
20. $x^2 + 6xy - 7y^2 + 8x - 8y - 5 = 0.$
21. $3x^2 - 2xy - y^2 - 2x + 2y + 1 = 0.$
22. $6x^2 + 11xy + 4y^2 - 2x - y - 13 = 0.$
23. $2x^2 + xy - 3y^2 - 2x + 3y = 0.$
24. $x^2 - 4y^2 - 20y - 1 = 0.$
25. $4x^2 + 5xy + y^2 + 8x + 2y - 1 = 0.$
26. $2xy - 2y^2 + 5x - 3y + 6 = 0.$
27. $7xy + 7y^2 - x + 13y - 2 = 0.$
28. $6x^2 - 3xy + 17x - y + 1 = 0.$
29. $6x^2 - 2xy - y^2 + 5x - y + 5 = 0.$
30. $5x^2 + 2xy - 3y^2 + 2x + 2y + 1 = 0.$

Задача 8.25. *Знайдіть дотичну до заданої лінії другого порядку, яка:*

а) *паралельна до осі абсцис;*
б) *перпендикулярна до прямої* $x + y = 0$;
в) *проходить через точку* $A(1; 0)$;
г) *яка утворює кут* $45°$ *з додатним напрямом осі абсцис.*

1. $4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0.$
2. $29x^2 - 24xy + 36y^2 + 82x - 96y - 91 = 0.$
3. $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0.$
4. $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0.$
5. $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0.$
6. $12x^2 + 5xy - 12x - 22y - 19 = 0.$
7. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 6x - 10y - 3 = 0.$
8. $x^2 - 12xy - 4y^2 + 12x + 8y + 5 = 0.$
9. $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0.$
10. $11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0.$

11. $8x^2 + 6xy - 26x - 12y + 11 = 0.$
12. $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0.$
13. $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0.$
14. $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$
15. $8x^2 + 7xy + 5y^2 - 16x - 5y - 2 = 0.$
16. $x^2 + 4xy + 5y^2 - 16x - 5y - 28 = 0.$
17. $8x^2 + 4xy + 5y^2 - 16x - 4y - 28 = 0.$
18. $8x^2 + 2xy + 5y^2 - 16x - 4y - 28 = 0.$
19. $8x^2 + 4xy + 5y^2 - 15x - 4y - 28 = 0.$
20. $7x^2 + 4xy + 5y^2 - 16x - 4y - 28 = 0.$
21. $5x^2 + 4xy + 3y^2 - 16x - 3y - 28 = 0.$
22. $8x^2 + 4xy + 5y^2 - 16x - 4y - 28 = 0.$
23. $8x^2 + 2xy + 5y^2 - 16x - 4y - 28 = 0.$
24. $8x^2 + 4xy + 5y^2 - 15x - 4y - 28 = 0.$
25. $7x^2 + 4xy + 5y^2 - 16x - 4y - 28 = 0.$
26. $5x^2 + 4xy + 3y^2 - 16x - 3y - 28 = 0.$
27. $6x^2 + 4xy + 5y^2 - 11x - 4y - 21 = 0.$
28. $8x^2 + 3xy + 5y^2 - 16x - 4y - 10 = 0.$
29. $7x^2 + 4xy + 5y^2 - 15x - 4y - 8 = 0.$
30. $41x^2 + 24xy + 9y^2 + 24x + 18y - 36 = 0.$

Задача 8.26. *Запишіть рівняння сторін квадрата, який описано навколо заданого еліпса.*

1. $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{3} = 1.$
2. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1.$
3. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1.$
4. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1.$
5. $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{3} = 1.$
6. $\frac{x^2}{11} + \frac{y^2}{7} = 1.$
7. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1.$
8. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1.$
9. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{7} = 1.$
10. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{5} = 1.$
11. $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1.$
12. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{3} = 1.$
13. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1.$
14. $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{5} = 1.$
15. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{5} = 1.$
16. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1.$
17. $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1.$
18. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1.$
19. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{3} = 1.$
20. $\frac{x^2}{11} + \frac{y^2}{3} = 1.$

21. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1.$
22. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1.$
23. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1.$
24. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} = 1.$
25. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1.$
26. $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{2} = 1.$
27. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1.$
28. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1.$
29. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{5} = 1.$
30. $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{5} = 1.$

Задача 8.27. *Запишіть рівняння множини точок, відношення відстаней від кожної з яких до точки F і до прямої l дорівнює e.*

1. $F(3;3),\ l:\ x + y = 0,\ e = \frac{1}{2}.$
2. $F(3;3),\ l: x + y = 0,\ e = 2.$
3. $F(3;3),\ l: x + y = 0,\ e = 1.$
4. $F(2;2),\ l:\ x - y + 1 = 0,\ e = \frac{1}{2}.$
5. $F(2;2),\ l: x - y + 1 = 0,\ e = 2.$
6. $F(2;2),\ l: x - y + 1 = 0,\ e = 1.$
7. $F(2;-3),\ l: x - y + 1 = 0,\ e = \frac{1}{2}.$
8. $F(2;-3),\ l: x - y + 1 = 0,\ e = 2.$
9. $F(2;-3),\ l: x - y + 1 = 0,\ e = 1.$
10. $F(3;-2),\ l: x + y + 1 = 0,\ e = \frac{1}{2}.$
11. $F(3;-2),\ l: x + y + 1 = 0,\ e = 2.$
12. $F(3;-2),\ l: x + y + 1 = 0,\ e = 1.$
13. $F(-2;1),\ l: 2x - y + 3 = 0,\ e = \frac{1}{2}.$
14. $F(-2;1),\ l: 2x - y + 3 = 0,\ e = 2.$
15. $F(-2;1),\ l: 2x - y + 3 = 0,\ e = 1.$
16. $F(-1;2),\ l: 2x + y + 3 = 0,\ e = \frac{1}{2}.$
17. $F(-1;2),\ l: 2x + y + 3 = 0,\ e = 2.$
18. $F(-1;2),\ l: 2x + y + 3 = 0,\ e = 1.$
19. $F(-2;-2),\ l: x - y = 0,\ e = \frac{1}{2}.$
20. $F(-2;-2),\ l: x - y = 0,\ e = 2.$
21. $F(-2;-2),\ l: x - y = 0,\ e = 1.$
22. $F(-1;-1),\ l: x + y - 1 = 0,\ e = \frac{1}{2}.$
23. $F(-1;-1),\ l: x + y - 1 = 0,\ e = 2.$
24. $F(-1;-1),\ l: x + y - 1 = 0,\ e = 1.$
25. $F(-3;1),\ l: x - 2y = 0,\ e = \frac{1}{2}.$

26. $F(-3;1)$, $l: x-2y=0$, $e=2$.
27. $F(-3;1)$, $l: x-2y=0$, $e=1$.
28. $F(-1;3)$, $l: x+2y-1=0$, $e=\frac{1}{2}$.
29. $F(-1;3)$, $l: x+2y-1=0$, $e=2$.
30. $F(-1;3)$, $l: x+2y-1=0$, $e=1$.

Задача 8.28. *Запишіть рівняння параболи з вершиною в початку координат, яка проходить через точку A і пряма l є її головним діаметром.*

1. $A(0;1)$, $l:\ x-2y=0$.
2. $A(0;1)$, $l:\ x+2y=0$.
3. $A(0;1)$, $l:\ x+y=0$.
4. $A(0;1)$, $l:\ x-y=0$.
5. $A(0;1)$, $l:\ x+3y=0$.
6. $A(0;1)$, $l:\ x-3y=0$.
7. $A(0;1)$, $l:\ 2x+y=0$.
8. $A(0;1)$, $l:\ 2x-y=0$.
9. $A(0;1)$, $l:\ 2x+2y=0$.
10. $A(0;1)$, $l:\ 2x-2y=0$.
11. $A(0;1)$, $l:\ 2x+3y=0$.
12. $A(0;1)$, $l:\ 2x-3y=0$.
13. $A(0;1)$, $l:\ 3x+y=0$.
14. $A(0;1)$, $l:\ 3x-y=0$.
15. $A(0;1)$, $l:\ 3x+2y=0$.
16. $A(1;1)$, $l:\ x-2y=0$.
17. $A(1;1)$, $l:\ x+2y=0$.
18. $A(1;1)$, $l:\ x+y=0$.
19. $A(1;-1)$, $l:\ x-y=0$.
20. $A(1;-1)$, $l:\ x+3y=0$.
21. $A(1;-1)$, $l:\ x-3y=0$.
22. $A(2;1)$, $l:\ 2x+y=0$.
23. $A(2;1)$, $l:\ 2x-y=0$.
24. $A(2;1)$, $l:\ 2x+2y=0$.
25. $A(3;1)$, $l:\ 2x-2y=0$.
26. $A(3;1)$, $l:\ 2x+3y=0$.
27. $A(3;1)$, $l:\ 2x-3y=0$.
28. $A(-1;1)$, $l:\ 3x+y=0$.
29. $A(-1;1)$, $l:\ 3x-y=0$.
30. $A(-1;1)$, $l:\ 3x+2y=0$.

Задача 8.29. *Запишіть рівняння параболи з вершиною в початку координат і фокусом в точці F.*

1. $F(1;-3)$.
2. $F(1;-4)$.
3. $F(-3;2)$.
4. $F(-5;-2)$.
5. $F(-4;-3)$.
6. $F(-2;6)$.
7. $F(-1;-1)$.
8. $F(5;-2)$.
9. $F(-6;3)$.
10. $F(-7;-1)$.
11. $F(-4;3)$.
12. $F(8;-6)$.
13. $F(-3;4)$.
14. $F(3;-4)$.
15. $F(-2;2)$.
16. $F(5;-2)$.
17. $F(1;-2)$.
18. $F(-1;2)$.
19. $F(-1;-2)$.
20. $F(-1;-3)$.
21. $F(-2;2)$.
22. $F(-3;-2)$.
23. $F(3;-2)$.
24. $F(-1;3)$.
25. $F(-1;-1)$.
26. $F(-3;2)$.
27. $F(1;-1)$.
28. $F(-1;1)$.
29. $F(3;-1)$.
30. $F(-2;3)$.

Задача 8.30. *Запишіть рівняння гіперболи, якщо прямі l_1 і l_2 є її асимтотами і гіпербола:*

а) *проходить через точку $A(0;1)$;*
б) *дотикається до прямої $x-3y+1=0$.*

1. $l_1: 2x+y+7=0$, $l_2: x-4y+2=0$.
2. $l_1: 2x-y+7=0$, $l_2: x+4y+2=0$.
3. $l_1: 3x+y-10=0$, $l_2: x-4y=0$.
4. $l_1: 3x-y-10=0$, $l_2: x+4y=0$.
5. $l_1: 2x-y+1=0$, $l_2: x-5y=0$.
6. $l_1: 2x+y+1=0$, $l_2: x+5y=0$.
7. $l_1: x+y+7=0$, $l_2: 3x-4y+2=0$.
8. $l_1: x-y+7=0$, $l_2: 3x+4y+2=0$.
9. $l_1: 2x+7y=0$, $l_2: x-y=0$.
10. $l_1: 2x-7y=0$, $l_2: x+y=0$.
11. $l_1: x-5y-7=0$, $l_2: x-5y=0$.
12. $l_1: x+5y-7=0$, $l_2: x+5y=0$.
13. $l_1: 2x+7y=0$, $l_2: x-4y+2=0$.
14. $l_1: 2x-7y=0$, $l_2: x+4y+2=0$.
15. $l_1: x+7y=0$, $l_2: x-5y+2=0$.
16. $l_1: x-7y=0$, $l_2: x+5y+2=0$.
17. $l_1: 2x+y+1=0$, $l_2: x-4y+5=0$.
18. $l_1: 2x-y+2=0$, $l_2: x+4y+5=0$.
19. $l_1: 2x+5y=0$, $l_2: x-2y+2=0$.
20. $l_1: 2x-5y=0$, $l_2: x+2y+2=0$.
21. $l_1: x+7y+7=0$, $l_2: x-4y+2=0$.
22. $l_1: x-7y+6=0$, $l_2: x+4y+2=0$.
23. $l_1: 2x+2y-1=0$, $l_2: x-y+2=0$.
24. $l_1: 2x-2y-1=0$, $l_2: x+y+2=0$.
25. $l_1: x+5y-1=0$, $l_2: x-4y+2=0$.
26. $l_1: x-5y-1=0$, $l_2: x+4y+2=0$.
27. $l_1: 2x-y=0$, $l_2: 5x+y+7=0$.
28. $l_1: 2x+y=0$, $l_2: 5x-y+7=0$.
29. $l_1: 2x+11=0$, $l_2: 5x-4y+2=0$.
30. $l_1: 2x-11=0$, $l_2: 5x+4y+2=0$.

Задача 8.31. *Запишіть рівняння еліпса, який описаний навколо рівностороннього трикутника, дві вершини якого розташовані в точках A та B і збігаються з вершинами еліпса, які лежать на одній з його осей.*

1. $A(5;0)$, $B(-5;0)$.
2. $A(0;5)$, $B(0;-5)$.
3. $A(1;0)$, $B(-1;0)$.
4. $A(0;1)$, $B(0;-1)$.
5. $A(2;0)$, $B(-2;0)$.
6. $A(0;2)$, $B(0;-2)$.
7. $A(3;0)$, $B(-3;0)$.
8. $A(0;3)$, $B(0;-3)$.
9. $A(4;0)$, $B(-4;0)$.
10. $A(0;4)$, $B(0;-4)$.
11. $A(6;0)$, $B(-6;0)$.
12. $A(0;6)$, $B(0;-6)$.
13. $A(7;0)$, $B(-7;0)$.
14. $A(0;7)$, $B(0;-7)$.
15. $A(8;0)$, $B(-8;0)$.
16. $A(0;8)$, $B(0;-8)$.
17. $A(9;0)$, $B(-9;0)$.
18. $A(0;9)$, $B(0;-9)$.
19. $A(10;0)$, $B(-10;0)$.
20. $A(0;10)$, $B(0;-10)$.
21. $A(11;0)$, $B(-11;0)$.
22. $A(0;11)$, $B(0;-11)$.
23. $A(12;0)$, $B(-12;0)$.
24. $A(0;12)$, $B(0;-12)$.
25. $A(13;0)$, $B(-13;0)$.
26. $A(0;13)$, $B(0;-13)$.
27. $A(14;0)$, $B(-14;0)$.
28. $A(0;14)$, $B(0;-144)$.
29. $A(15;0)$, $B(-15;0)$.
30. $A(0;15)$, $B(0;-15)$.

Задача 8.32. *Запишіть рівняння круглого циліндра, що містить точку A, і пряма l є його віссю.*

1. $A(1;0;1)$, $l:\begin{cases} x=3t\\ y=-t+1\\ z=2\end{cases}$.
2. $A(-1;1;0)$, $l:\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$.
3. $A(1;-1;0)$, $l:\begin{cases} x=3t\\ y=-t+1\\ z=2\end{cases}$.
4. $A(1;0;-1)$, $l:\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z+1}{-3}$.
5. $A(1;-1;0)$, $l:\begin{cases} x=t-1\\ y=-3t\\ z=1-t\end{cases}$.
6. $A(-1;1;0)$, $l:\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z-3}{1}$.
7. $A(1;0;-1)$, $l:\begin{cases} x=-t\\ y=-1\\ z=3t-2\end{cases}$.
8. $A(1;0;1)$, $l:\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{0}$.
9. $A(1;0;-1)$, $l:\begin{cases} x=-t\\ y=-1\\ z=3t-2\end{cases}$;
10. $A(1;0;1)$, $l:\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{0}$.

11. $A(1;0;-1)$, $l:\begin{cases} x=2t\\ y=3\\ z=-1-t\end{cases}$.
12. $A(-1;1;0)$, $l:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+3}{0}$.
13. $A(1;0;1)$, $l:\begin{cases} x=t\\ y=-3t\\ z=1-t\end{cases}$.
14. $A(-1;0;-1)$, $l:\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$.
15. $A(1;0;1)$, $l:\begin{cases} x=t\\ y=-3t\\ z=1-t\end{cases}$.
16. $A(1;0;1)$, $l:\begin{cases} x=5t\\ y=-2t+1\\ z=3\end{cases}$.
17. $A(-1;1;0)$, $l:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{-1}$.
18. $A(1;-1;0)$, $l:\begin{cases} x=3+t\\ y=-2t+1\\ z=1\end{cases}$.
19. $A(1;0;-1)$, $l:\dfrac{x-3}{-4}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{-2}$.
20. $A(1;-1;0)$, $l:\begin{cases} x=3t-1\\ y=-2t\\ z=1-4t\end{cases}$.
21. $A(-1;1;0)$, $l:\dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-3}{0}$.
22. $A(1;0;-1)$, $l:\begin{cases} x=-3t\\ y=-4\\ z=t-2\end{cases}$.
23. $A(1;0;1)$, $l:\dfrac{x+2}{0}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{1}$.
24. $A(1;0;-1)$, $l:\begin{cases} x=-2t\\ y=-3\\ z=2t-2\end{cases}$.
25. $A(1;0;1)$, $l:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{4}$.
26. $A(1;0;-1)$, $l:\begin{cases} x=t\\ y=3+t\\ z=-1-t\end{cases}$.
27. $A(-1;1;0)$, $l:\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-3}{-3}$.

28. $A(1;0;1),\quad l:\begin{cases} x=4t \\ y=-t \\ z=1-2t \end{cases}.$
29. $A(-1;0;-1), l: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}.$
30. $A(1;0;1),\quad l:\begin{cases} x=4t \\ y=-t \\ z=1-2t \end{cases}.$

Задача 8.33. *Запишіть рівняння поверхні круглого конуса з вершиною в точці A, напрямним вектором осі $\overline{p}$, якщо відомо, що точка $B(0,0,0)$ належить конусу.*

1. $A(1;1;0)$, $\vec{p}(2;2;1)$.
2. $A(1;2;3)$, $\vec{p}(-1;2;1)$.
3. $A(2;1;0)$, $\vec{p}(-2;2;1)$.
4. $A(1;1;3)$, $\vec{p}(0;2;1)$.
5. $A(0;1;-2)$, $\vec{p}(2;-2;1)$.
6. $A(2;1;3)$, $\vec{p}(3;2;1)$.
7. $A(3;1;0)$, $\vec{p}(2;1;2)$.
8. $A(-2;1;3)$, $\vec{p}(2;3;1)$.
9. $A(1;-1;2)$, $\vec{p}(2;1;-2)$.
10. $A(1;2;-3)$, $\vec{p}(3;2;-1)$.
11. $A(1;0;2)$, $\vec{p}(-2;1;-2)$.
12. $A(0;1;3)$, $\vec{p}(1;3;1)$.
13. $A(0;-1;3)$, $\vec{p}(-2;1;2)$.
14. $A(1;-3;0)$, $\vec{p}(3;1;1)$.
15. $A(3;-1;2)$, $\vec{p}(-2;-1;-2)$.
16. $A(1;1;-3)$, $\vec{p}(0;-2;1)$.
17. $A(3;-2;2)$, $\vec{p}(2;1;-2)$.
18. $A(2;1;4)$, $\vec{p}(-2;2;1)$.
19. $A(2;-1;3)$, $\vec{p}(2;1;2)$.
20. $A(1;4;0)$, $\vec{p}(2;3;-1)$.
21. $A(1;-1;2)$, $\vec{p}(1;-2;2)$.
22. $A(3;1;-3)$, $\vec{p}(-1;3;1)$.
23. $A(1;-3;2)$, $\vec{p}(1;2;2)$.
24. $A(2;1;-2)$, $\vec{p}(3;2;1)$.
25. $A(3;-1;1)$, $\vec{p}(-1;2;2)$.
26. $A(1;1;-1)$, $\vec{p}(1;-2;1)$.
27. $A(2;-1;3)$, $\vec{p}(1;2;-2)$.
28. $A(1;3;3)$, $\vec{p}(-2;3;1)$.
29. $A(1;3;-2)$, $\vec{p}(1;0;-3)$.
30. $A(1;-3;1)$, $\vec{p}(-1;-2;2)$.

Задача 8.34. *Запишіть рівняння поверхні круглого конуса, вершина якого розташована в точці A, вісь паралельна до прямої l, а твірні з віссю утворюють кут α.*

1. $A(1;1;2),\quad l: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{0}=\dfrac{z}{-1},\quad \alpha=\dfrac{\pi}{6}.$
2. $A(1;-2;1),\quad l: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z-2}{-3},\quad \alpha=\dfrac{\pi}{6}.$
3. $A(2;-1;1),\quad l: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{0},\quad \alpha=\dfrac{\pi}{6}.$
4. $A(1;2;1),\quad l: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+2}{-3},\quad \alpha=\dfrac{\pi}{6}.$
5. $A(-2;1;1),\quad l: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{0},\quad \alpha=\dfrac{\pi}{6}.$

6. $A(1;1;2),\quad l: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{0}=\dfrac{z}{-1},\quad \alpha=\dfrac{\pi}{3}.$
7. $A(1;-2;-1),\quad l: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z-2}{-3},\quad \alpha=\dfrac{\pi}{3}.$
8. $A(2;-1;1),\quad l: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{2},\quad \alpha=\dfrac{\pi}{3}.$
9. $A(-1;-2;-1),\quad l: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+2}{-3},\quad \alpha=\dfrac{\pi}{3}.$
10. $A(-2;1;1),\quad l: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{0},\quad \alpha=\dfrac{\pi}{3}.$
11. $A(1;1;-2),\quad l: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{0}=\dfrac{z}{-1},\quad \alpha=\dfrac{\pi}{4}.$
12. $A(1;-2;1),\quad l: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z-2}{-2},\quad \alpha=\dfrac{\pi}{4}.$
13. $A(2;-1;1),\quad l: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{0},\quad \alpha=\dfrac{\pi}{4}.$
14. $A(1;2;1),\quad l: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+2}{-3},\quad \alpha=\dfrac{\pi}{4}.$
15. $A(-2;1;-1),\quad l: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{0},\quad \alpha=\dfrac{\pi}{4}.$
16. $A(1;-2;3),\quad l: \dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y-3}{0}=\dfrac{z-4}{-1},\quad \alpha=\dfrac{\pi}{3}.$
17. $A(3;-2;1),\quad l: \dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-3},\quad \alpha=\dfrac{\pi}{3}.$
18. $A(2;-1;-1),\quad l: \dfrac{x=9}{1}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-5}{0},\quad \alpha=\dfrac{\pi}{3}.$
19. $A(1;2;-1),\quad l: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+4}{0}=\dfrac{z+2}{-4},\quad \alpha=\dfrac{\pi}{3}.$
20. $A(-2;3;1),\quad l: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-5}{0},\quad \alpha=\dfrac{\pi}{4}.$
21. $A(1;-1;2),\quad l: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{0}=\dfrac{z}{-5},\quad \alpha=\dfrac{\pi}{4}.$
22. $A(3;-2;-1),\quad l: \dfrac{x-8}{1}=\dfrac{y+9}{0}=\dfrac{z-2}{-7},\quad \alpha=\dfrac{\pi}{6}.$
23. $A(2;-1;-1),\quad l: \dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{1},\quad \alpha=\dfrac{\pi}{4}.$
24. $A(-1;2;-1),\quad l: \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-6}{0}=\dfrac{z+2}{-1},\quad \alpha=\dfrac{\pi}{4}.$
25. $A(-2;-1;1),\quad l: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z+2}{0},\quad \alpha=\dfrac{\pi}{6}.$
26. $A(1;-1;-2),\quad l: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+3}{0}=\dfrac{z-5}{-5},\quad \alpha=\dfrac{\pi}{6}.$
27. $A(1;-2;-1),\quad l: \dfrac{x+6}{1}=\dfrac{y-8}{0}=\dfrac{z+2}{-1},\quad \alpha=\dfrac{\pi}{4}.$
28. $A(2;1;3),\quad l: \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-4}{0},\quad \alpha=\dfrac{\pi}{4}.$
29. $A(1;-2;-1),\quad l: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z-2}{-3},\quad \alpha=\dfrac{\pi}{4}.$
30. $A(-2;-1;-1),\quad l: \dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{1},\quad \alpha=\dfrac{\pi}{4}.$

Задача 8.35. *Відшукайте рівняння циліндра, твірні якого паралельні до вектора $\vec{p}$, а напрямна задається лінією N.*

1. $\vec{p}(1;0;-2), \quad N: \begin{cases} y^2+3z=0 \\ x-y=0 \end{cases}.$
2. $\vec{p}(1;3;0), \quad N: \begin{cases} y^2+3z=0 \\ x-y=0 \end{cases}.$
3. $\vec{p}(3;0;1), \quad N: \begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x+y+z=0 \end{cases}.$
4. $\vec{p}(2;0;-1), \quad N: \begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x+y+z=0 \end{cases}.$
5. $\vec{p}(-1;0;-3), \quad N: \begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x+y+z=0 \end{cases}.$
6. $\vec{p}(1;0;5), \quad N: \begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x+y+z=0 \end{cases}.$
7. $\vec{p}(1;-3;0), \quad N: \begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x+y+z=0 \end{cases}.$
8. $\vec{p}(-2;0;1), \quad N: \begin{cases} x^2-2z+1=0 \\ y-z=0 \end{cases}.$
9. $\vec{p}(-3;0;-1), \quad N: \begin{cases} x^2-2z+1=0 \\ y-z=0 \end{cases}.$
10. $\vec{p}(1;0;-4), \quad N: \begin{cases} x^2-2z+1=0 \\ y-z=0 \end{cases}.$
11. $\vec{p}(1;3;0), \quad N: \begin{cases} x^2-2z+1=0 \\ y-z=0 \end{cases}.$
12. $\vec{p}(1;-2;0), \quad N: \begin{cases} x^2-2z+1=0 \\ y-z=0 \end{cases}.$
13. $\vec{p}(5;0;1), \quad N: \begin{cases} y^2+3z=0 \\ x-y=0 \end{cases}.$
14. $\vec{p}(0;3;-1), \quad N: \begin{cases} y^2+3z=0 \\ x-y=0 \end{cases}.$
15. $\vec{p}(1;2;-1), \quad N: \begin{cases} y^2+3z=0 \\ x-y=0 \end{cases}.$
16. $\vec{p}(1;3;-2), \quad N: \begin{cases} 2y^2-3z=0 \\ x-z=0 \end{cases}.$
17. $\vec{p}(1;3;3), \quad N: \begin{cases} y^2-3x=0 \\ x-z=0 \end{cases}.$
18. $\vec{p}(3;3;1), \quad N: \begin{cases} x^2-3y^2=9 \\ x+2y+3z=0 \end{cases}.$
19. $\vec{p}(2;3;-1), \quad N: \begin{cases} 3x^2-y^2=9 \\ 2x+3y+z=0 \end{cases}.$

20. $\vec{p}(-1;3;-3), \quad N: \begin{cases} 4x^2-y^2=9 \\ x+2y-3z=0 \end{cases}.$
21. $\vec{p}(1;3;5), \quad N: \begin{cases} 5x^2-4y^2=9 \\ x-2y-3z=0 \end{cases}.$
22. $\vec{p}(1;-3;4), \quad N: \begin{cases} x^2-4y^2=9 \\ x-y+z=0 \end{cases}.$
23. $\vec{p}(-2;3;1), \quad N: \begin{cases} 2x^2-4z+1=0 \\ y-2z=0 \end{cases}.$
24. $\vec{p}(-3;3;-1), \quad N: \begin{cases} 3x^2-2z-1=0 \\ y+z=0 \end{cases}.$
25. $\vec{p}(1;3;-4), \quad N: \begin{cases} x^2-3z+5=0 \\ y+2z=0 \end{cases}.$
26. $\vec{p}(1;3;2), \quad N: \begin{cases} x^2-4y+1=0 \\ y-6z=0 \end{cases}.$
27. $\vec{p}(1;-2;3), \quad N: \begin{cases} 2x^2-5z+1=0 \\ 3y-z=0 \end{cases}.$
28. $\vec{p}(5;3;1), \quad N: \begin{cases} 2y^2-3z=0 \\ x-2y=0 \end{cases}.$
29. $\vec{p}(2;3;-1), \quad N: \begin{cases} 5y^2-3z=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}.$
30. $\vec{p}(1;2;-3), \quad N: \begin{cases} 3y^2-z=0 \\ x-4y=0 \end{cases}.$

Задача 8.36. *Знайдіть рівняння конуса з вершиною A і напрямною, що задається лінією N.*

1. $A(2;0;1), \quad N: \begin{cases} x^2-2z+1=0 \\ y-z=0 \end{cases}.$
2. $A(0;0;-1), \quad N: \begin{cases} x^2-2z+1=0 \\ y-z=0 \end{cases}.$
3. $A(-1;0;-1), \quad N: \begin{cases} x^2-2z+1=0 \\ y-z=0 \end{cases}.$
4. $A(1;0;0), \quad N: \begin{cases} x^2-2z+1=0 \\ y-z=0 \end{cases}.$
5. $A(1;1;0), \quad N: \begin{cases} x^2-2z+1=0 \\ y-z=0 \end{cases}.$
6. $A(1;0;1), \quad N: \begin{cases} y^2+3z=0 \\ x-y=0 \end{cases}.$
7. $A(0;0;-1), \quad N: \begin{cases} y^2+3z=0 \\ x-y=0 \end{cases}.$
8. $A(-1;0;-1), \quad N: \begin{cases} y^2+3z=0 \\ x-y=0 \end{cases}.$

9. $A(1;0;0),\quad N:\begin{cases} y^2+3z=0\\ x-y=0\end{cases}.$
10. $A(1;1;0),\quad N:\begin{cases} y^2+3z=0\\ x-y=0\end{cases}.$
11. $A(1;0;1),\quad N:\begin{cases} x^2+y^2=9\\ x+y+z=0\end{cases}.$
12. $A(0;0;-1),\quad N:\begin{cases} x^2+y^2=9\\ x+y+z=0\end{cases}.$
13. $A(-1;0;-1),\quad N:\begin{cases} x^2+y^2=9\\ x+y+z=0\end{cases}.$
14. $A(1;0;0),\quad N:\begin{cases} x^2+y^2=9\\ x+y+z=0\end{cases}.$
15. $A(1;1;0),\quad N:\begin{cases} x^2+y^2=9\\ x+y+z=0\end{cases}.$
16. $A(1;1;1),\quad N:\begin{cases} 2x^2-z+1=0\\ y+z=0\end{cases}.$
17. $A(0;1;-1),\quad N:\begin{cases} 3x^2+z+1=0\\ y+3z=0\end{cases}.$
18. $A(-1;1;-1),\quad N:\begin{cases} 2x^2+2z+1=0\\ y-4z=0\end{cases}.$
19. $A(1;1;0),\quad N:\begin{cases} x^2-2y+1=0\\ x-z=0\end{cases}.$
20. $A(1;1;2),\quad N:\begin{cases} x^2-2y+1=0\\ x-z=0\end{cases}.$
21. $A(1;2;1),\quad N:\begin{cases} y^2-3z=0\\ 2x-y=0\end{cases}.$
22. $A(0;1;-1),\quad N:\begin{cases} y^2-4z=0\\ 3x-y=0\end{cases}.$
23. $A(-1;3;-1),\quad N:\begin{cases} y^2-x=0\\ x-z=0\end{cases}.$
24. $A(1;0;1),\quad N:\begin{cases} y^2+3x=0\\ z-y=0\end{cases}.$
25. $A(1;1;2),\quad N:\begin{cases} 2y^2-3x=0\\ x-z=0\end{cases}.$
26. $A(1;0;1),\quad N:\begin{cases} x^2-y^2=9\\ x+2y+3z=0\end{cases}.$
27. $A(1;0;-1),\quad N:\begin{cases} x^2-y^2=9\\ x+2y+z=0\end{cases}.$
28. $A(-1;1;-1),\quad N:\begin{cases} x^2-y^2=9\\ x+y+2z=0\end{cases}.$
29. $A(1;0;1),\quad N:\begin{cases} x^2-y^2=9\\ -x+y+z=0\end{cases}.$

30. $A(1;1;2),\quad N:\begin{cases} -x^2+y^2=9\\ 2x+y+z=0\end{cases}.$

Задача 8.37. *У площині Oxy задано пряму l. Запишіть рівняння поверхні обертання прямої l навколо осі Ox.*

1. $l: x+y=1.$
2. $l: x-y=1.$
3. $l: x-2y=1.$
4. $l: 2x+y=1.$
5. $l: 2x-y=1.$
6. $l: x-2y=2.$
7. $l: x+3y=1.$
8. $l: x-3y=1.$
9. $l: x-2y=3.$
10. $l: x+y=1.$
11. $l: 3x-y=1.$
12. $l: 3x-2y=1.$
13. $l: x+y=3.$
14. $l: 4x-y=1.$
15. $l: 4x-2y=1.$
16. $l: 4x+y=1.$
17. $l: x-4y=1.$
18. $l: 4x-2y=1.$
19. $l: 4x+y=2.$
20. $l: x-2y=2.$
21. $l: x-2y=4.$
22. $l: x+4y=2.$
23. $l: 3x-y=6.$
24. $l: 3x-2y=6.$
25. $l: x+6y=12.$
26. $l: 2x-y=10.$
27. $l: x-2y=12.$
28. $l: x+y=10.$
29. $l: x-y=14.$
30. $l: 3x-2y=18.$

Задача 8.38. *Задано поверхню другого порядку. Визначте її тип. Запишіть її канонічне рівняння і знайдіть канонічну систему координат.*

1. $4x^2+y^2+4z^2-4xy+4yz-8xz-28x+2y+16z+45=0.$
2. $4x^2+6y^2+4z^2+4xz-8y-4z+3=0.$
3. $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y-10z=0.$
4. $x^2+y^2-3z^2-2xy-6yz-6xz+2x+2y+4z=0.$
5. $x^2-2y^2+z^2+4xy-4yz-8xz-14x-4y+14z+16=0.$
6. $2x^2+y^2+2z^2-2xy-2yz+x-4y-3z+2=0.$
7. $x^2-2y^2+z^2+4xy+4yz-10xz+x+y-z=0.$
8. $2x^2+y^2+2z^2-2xy-2yz+4x-2y=0.$
9. $x^2-y^2+z^2+4xy+4yz-10xz+2x+4y-10z-1=0.$
10. $x^2+y^2+4z^2+2xy+4yz+4xz-6z+1=0.$
11. $4xy+2x+4y-6z-3=0.$
12. $xy+yz+xz+2x+2y-2z=0.$
13. $y^2+2xy+2yz+4xz-4x-2y=0.$
14. $2x^2+9y^2+2z^2-4xy+4yz-1=0.$
15. $3x^2+3y^2+3z^2-8xy-6yz=0.$
16. $4x^2-2y^2-12z^2+4xy+2yz=0.$
17. $x^2-3y^2+4zx-2yz=0.$
18. $x^2+4y^2+z^2-4xy-4yz+2xz=0.$

19. $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y+2z=0.$
20. $4x^2+2y^2+10z^2-xy+12xz-8yz=0.$
21. $4x^2+9y^2+z^2-12xy+4xz-6yz+4x-6y+2z-5=0.$
22. $x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz-14x-4y+14z+16=0.$
23. $2x^2+y^2+2z^2-2xy-2yz+x-4y-3z+2=0.$
24. $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y+2z=0.$
25. $9x^2-4y^2-91z^2-40yz+18xz-36=0.$
26. $x^2+2y^2+3z^2-6z+3=0.$
27. $2x^2-3z^2+4xy+2yz-5xz-8x-12y+17z+6=0.$
28. $x^2-5z^2+3xy+2yz-7x-6y-2z+10=0.$
29. $x^2+2y^2+4z^2-2xy-4yz+2x-2y-4=0.$
30. $x^2+3y^2+8z^2+2xy+8yz-4x+8z+6=0.$

Задача 8.39. *Знайдіть прямолінійні твірні заданої поверхні, які проходять через точку A.*

1. $y^2+2xy+2yz+4xz-4x-2y=0,\ A(-1;0;1).$
2. $x^2+2xy+2xz+4yz-4y-2x=0,\ A(0;-1;1).$
3. $3x^2+3y^2+3z^2-8xy-6yz=0,\ A(0;1;1).$
4. $4x^2+y^2+4z^2-4xy+4yz-8xz-28x+2y+16z+45=0,\ A(2;1;0).$
5. $4x^2+6y^2+4z^2+4xz-8y-4z+3=0,\ A\left(0;1;\frac{1}{2}\right).$
6. $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y-10z=0,\ A(0;0;0).$
7. $x^2-2y^2+z^2+4xy+4yz-10xz+x+y-z=0,\ A(0;0;0).$
8. $2x^2+y^2+2z^2-2xy-2yz+4x-2y=0,\ A(0;0;0).$
9. $x^2-y^2+z^2+4xy+4yz-10xz+2x+4y-10z-2=0,\ A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1;\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$
10. $x^2+y^2+4z^2+2xy+4yz+4xz-6z+1=0,\ A\left(-1;-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right).$
11. $4xy+2x+4y-6z-3=0,\ A\left(\frac{3}{2};0;0\right).$
12. $xy+yz+xz+2x+2y-2z+5=0,\ A(0;-1;1).$
13. $x^2+y^2-3z^2-2xy-6yz-6xz+2x+2y+4z=0,\ A(0;0;0).$
14. $x^2-2y^2+z^2+4xy-4yz-8xz-14x-4y+14z+15=0,\ A(1;-1;0).$
15. $2x^2+y^2+2z^2-2xy-2yz+x-4y-3z+2=0,\ A(0;2+\sqrt{2};0).$
16. $y^2+2xy+2yz+4xz-4x-2y=0,\ A(0;0;0).$
17. $2x^2+9y^2+2z^2-4xy+4yz-1=0,\ A\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right).$
18. $3x^2+3y^2+3z^2-8xy-6yz=0,\ A(0;0;0).$
19. $4x^2+y^2+4z^2-4xy+4yz-8xz-28x+2y+16z+45=0,\ A\left(-\frac{1}{8};\frac{31}{4};-4\right).$
20. $4x^2+6y^2+4z^2+4xz-8y-4z+3=0,\ A\left(0;1;-\frac{1}{2}\right).$
21. $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y-10z=0,\ A(0;0;0).$
22. $x^2-2y^2+z^2+4xy+4yz-10xz+x+y-z=0,\ A(0;0;0).$
23. $2x^2+y^2+2z^2-2xy-2yz+4x-2y=0,\ A(0;0;0).$
24. $x^2-y^2+z^2+4xy+4yz-10xz+2x+4y-10z-1=0,\ A(-2;5;1).$
25. $x^2+y^2+4z^2+2xy+4yz+4xz-6z-1=0,\ A(-2;-5;8).$
26. $4xy+2x+4y-6z-3=0,\ A\left(-\frac{7}{2};-1;0\right).$
27. $xy+yz+xz+2x+2y-2z=0,\ A(2;-1;0).$
28. $x^2+y^2-3z^2-2xy-6yz-6xz+2x+2y+4z=0,\ A(0;0;0).$

29. $x^2-2y^2+z^2+4xy-4yz-8xz-14x-4y+14z+15=0,\ A(1;-1;0).$
30. $2x^2+y^2+2z^2-2xy-2yz+x-4y-3z+2=0,\ A\left(\frac{1}{32};\frac{9}{16};\frac{1}{32}\right).$

Задача 8.40. *Знайдіть діаметральну площину заданої поверхні другого порядку, яка паралельна до площини π.*

1. $2x^2+y^2+2z^2-2xy-2yz+4x-2y=0,\quad \pi:\ x+y+z=0.$
2. $x^2-y^2+z^2+4xy+4yz-10xz+2x+4y-10z-1=0,\quad \pi:\ x-2y+1=0.$
3. $x^2+y^2+4z^2+2xy+4yz+4xz-6z+1=0,\quad \pi:\ 3x-z+1=0.$
4. $4xy+2x+4y-6z-3=0,\quad \pi:\ x+y+z=0.$
5. $xy+yz+xz+2x+2y-2z=0,\quad \pi:\ x-2y+1=0.$
6. $y^2+2xy+2yz+4xz-4x-2y=0,\quad \pi:\ 3x-z+1=0.$
7. $2x^2+9y^2+2z^2-4xy+4yz-1=0,\quad \pi:\ x+y+z=0.$
8. $3x^2+3y^2+3z^2-8xy-6yz=0,\quad \pi:\ x-2y+1=0;$
9. $4x^2+y^2+4z^2-4xy+4yz-8xz-28x+2y+16z+45=0,\quad \pi:\ 3x-z+1=0.$
10. $4x^2+6y^2+4z^2+4xz-8y-4z+3=0,\quad \pi:\ x+y+z=0.$
11. $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y-10z=0,$ $\pi:\ x-2y+1=0.$
12. $x^2+y^2-3z^2-2xy-6yz-6xz+2x+2y+4z=0,$ $\pi:\ 3x-z+1=0.$
13. $x^2-2y^2+z^2+4xy-4yz-8xz-14x-4y+14z+16=0,\quad \pi:\ x+y+z=0.$
14. $2x^2+y^2+2z^2-2xy-2yz+x-4y-3z+2=0,\quad \pi:\ x-2y+1=0.$
15. $x^2-2y^2+z^2+4xy-4yz-10xz+x+y-z=0,\quad \pi:\ 2x-z+1=0.$
16. $2x^2-y^2+2z^2-2xy-2yz-4x-2y=0,\quad \pi:\ x+2y+z=0.$
17. $x^2-y^2-z^2+4xy-4yz-10xz+2x+4y-10z-1=0,\quad \pi:\ 3x-2y+1=0.$
18. $x^2-y^2+4z^2+2xy-4yz+4xz-6z+1=0,\quad \pi:\ 3x-y-z+1=0.$
19. $4xy-2x+4y+6z-3=0,\quad \pi:\ x+2y+z=0.$
20. $xy-yz+xz-2x+2y-2z=0,\quad \pi:\ x-2y+z+1=0.$
21. $y^2+2xy-2yz-4xz-4x-2y=0,\quad \pi:\ 3x-2y-z+1=0.$
22. $2x^2+9y^2-2z^2+4xy+4yz-1=0,\quad \pi:\ x-2y+z=0.$
23. $3x^2+3y^2-3z^2+8xy-6yz=0,\quad \pi:\ x-2y+3z+1=0.$
24. $4x^2+y^2-4z^2-4xy-4yz-8xz-28x+2y+16z+45=0,\quad \pi:\ 3x-2y-z+1=0.$
25. $4x^2-6y^2+4z^2-4xz-8y-4z+3=0,\quad \pi:\ x+y+z=0.$
26. $x^2-5y^2+z^2+2xy-6xz+2yz-2x+6y-10z=0,$ $\pi:\ x-2y+z+1=0.$
27. $x^2+y^2+3z^2-2xy-6yz+6xz+2x+2y+4z=0,$ $\pi:\ 3x+y-z+1=0.$
28. $x^2-2y^2-z^2+4xy+4yz-8xz-14x-4y+14z+16=0,\quad \pi:\ x+2y+z=0.$
29. $2x^2-y^2+2z^2-2xy+2yz+x-4y-3z+2=0,\quad \pi:\ 3x-2y+1=0.$
30. $x^2+2y^2+z^2+2xy+2yz-10xz+x+y-z=0,\quad \pi:\ 3x-z+1=0.$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Александров П.С.* Лекции по аналитической геометрии. М., 1968.
2. *Александров П.С.* Курс по аналитической геометрии и линейной алгебре. М.: Наука, 1979.
3. *Банах Т., Бокало Б., Іщук Ю., Трущак Х.* Збірник задач з аналітичної геометрії. Львів.: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2003.
4. *Бахвалов С.В.* Сборник задач по аналитической геометрии. М., 1964.
5. *Берже М.* Геометрия. М.: Мир, 1984.
6. *Бокало Б., Бридун В., Гуран І.* Навчально-методичний посібник з аналітичної геометрії. Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2008.
7. *Клетник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии. М., 1969.
8. *Моденов П.С.* Аналитическая геометрия. М.: Издательство Московского университета, 1969.
9. *Моденов П.С., Пархоменко А.С.* Сборник задач по аналитической геометрии. М., 1976.
10. *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии. М.: Наука, 1991.
11. *Цубербиллер О.И.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии. М.: Наука, 1966.
12. *Яковець В.П., Боровик В.Н., Вавринович Л.В.* Аналітична геометрія, Суми, Українська книга, 2004.

Навчальне видання

БОКАЛО Богдан Михайлович
БРИДУН Вікторія Любомирівна
ГУРАН Ігор Йосипович
КОЛОС Надія Мирославівна

Аналітична геометрія в прикладах і задачах

Навчальний посібник

Редагування і коректура *Н. Й. Плиса*
Комп'ютерний набір і верстання *В. Л. Бридун*

Підп. до друку 3.08.2016. Формат 60 × 84/16
Папір друк. Друк на різогр. Гарнітура TEX
Умовн. друк. арк. 19,46. Тираж 300 прим.

Видавець ФОП І. Е. Чижиков
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
Серія ЛВ № 56 від 07.09.2009
Тел.: 095 75 44 270; e-mail: zakaz@chyslo.com.ua
Web: www.chyslo.com.ua, www.facebook.com/chyslo/

Друк: ФОП Кундельська В.О.
79037, м. Львів, вул. Студинського, 4.
Виписка з ЄДР серія АА № 543619 від 22.10.2007 р.
Тел.: 096 270 62 87; 050 227 91 39; e-mail: genaprint@gmail.com

У межах **видавничого проекту «ЧИСЛО»**
вийшли у світ

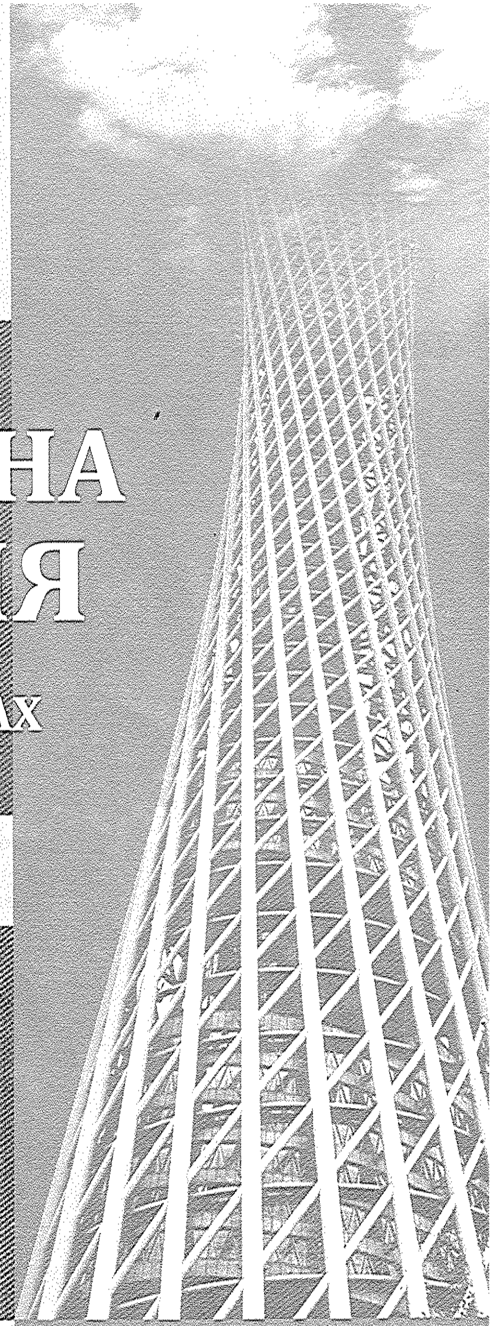
1. Олег Сторож. *Збірник задач з теорії міри і функціонального аналізу.* – 2011. – 152 с.
2. О. М. Бугрій, Н. П. Процах, Н. В. Бугрій. *Основи диференціальних рівнянь теорія, приклади та задачі* : начальний посібник. – 2011. – 348 с.
3. О. Б. Скасків. *Теорія ймовірностей* : навчальний посібник. – 2012. – 144 с.
4. В. М. Кадець. *Курс функціонального аналізу та теорії міри* : підручник. – 2012. – 590 с.
5. Г. П. Лопушанська, О. М. Бугрій, А. О. Лопушанський. *Диференціальні рівняння та рівняння математичної фізики* : підручник. – 2012. – 362 с.
6. С. І. Підкуйко, М. В. Баб'як. *Функціональні послідовності і ряди* : навчальний посібник. – 2012. – 183 с.
7. С. І. Підкуйко, М. С. Підкуйко. *Застосування інтеграла Рімана* : навчальний посібник. – 2013. – 151 с.
8. Л. Є. Базилевич. *Дискретна математика в прикладах і задачах* : підручник. – 2013. – 487 с.
9. М. Т. Бордуляк, О. Б. Скасків, О. М. Сумик, І. Е. Чижиков. *Теореми і задачі теорії ймовірностей* : навчальний посібник. – 2013. – 175 с.
10. О. М. Романів. *Лінійна алгебра. Ч. 2* : підручник. – 2014. – 279 с.
11. Ю. М. Березанський, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель. *Функціональний аналіз* : підручник. – 2014. – 559 с.
12. М. Л. Крайзман. *Деякі методи та прийоми розв'язування задач із математики* : навчально-методичний посібник. – 2015. – 239 с.
13. Andrii Bandura, Oleh Skaskiv. *Entire functions of several variables of bounded L-index in direction and of bounded L-index in joint variables*: monograph. – 2016. – 128 p.
14. Б. М. Бокало, В. Л. Бридун, І. Й. Гуран, Н. М. Колос. *Аналітична геометрія в прикладах і задачах* : навчальний посібник. – 2016. – 335 с.

готуються до друку

1. А. Я. Дороговцев. *Математичний аналіз* : навчальний посібник.

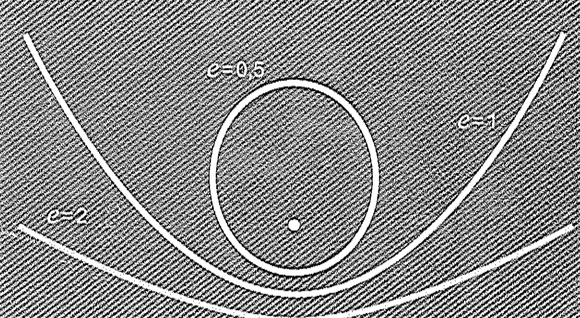
ISBN 978-966-2645-16-3

Б. М. БОКАЛО
В. Л. БРИДУН
І. Й. ГУРАН
Н. М. КОЛОС



АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

У ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ



Математичний Практикум 5